

การจัดการเรียนรู้คณิตศาสตร์

รองศาสตราจารย์วัชร กัญจน์กิริติ

ค.บ. (เกียรตินิยม) , ศศ.ม.

สาขาคณิตศาสตร์และคอมพิวเตอร์

คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

มหาวิทยาลัยราชภัฏเพชรบุรี

2554

คำนำ

หนังสือเล่มนี้ได้จัดทำขึ้นเพื่อนำเสนอแนวทางการพัฒนาการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ในโรงเรียน ซึ่งเป็นส่วนหนึ่งของการเรียนในรายวิชาการจัดการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ของมหาวิทยาลัยราชภัฏเพชรบุรี สำหรับนักศึกษาผู้ที่จะเป็นครูต่อไปในอนาคต ที่ต้องพบปัญหาและหาทางแก้ปัญหาที่เกิดขึ้นในระหว่างสอนให้ได้อย่างมีประสิทธิภาพ เพราะเป็นส่วนหนึ่งที่ส่งผลกระทบต่อและมีอิทธิพลต่อผู้เรียนในด้านทัศนคติที่ดี กระตุ้นให้เกิดความสนใจชอบการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ รวมทั้งตื่นตัวทำทบทวนกับการค้นพบความคิดและวิธีแก้ปัญหาย่างสร้างสรรค์

หนังสือการจัดการเรียนรู้คณิตศาสตร์ จึงเป็นการบูรณาการความคิดควบคู่กับการพัฒนารูปแบบการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ทั้งตัวผู้สอนกับผู้เรียนให้สอดคล้องกัน มุ่งเน้นการเพิ่มทักษะและกระบวนการคิดแก้ปัญหาที่แตกต่างกันออกไปทำให้ง่ายต่อการทำไปใช้แก้ปัญหากับผู้เรียน โดยปัญหาต่าง ๆ นำมาจากข้อสอบแข่งขันทั้งในและต่างประเทศเป็นตัวอย่าง

จึงหวังเป็นอย่างยิ่งหนังสือการจัดการเรียนรู้คณิตศาสตร์ จะเป็นส่วนหนึ่งที่ช่วยให้ครูพัฒนาการสอนคณิตศาสตร์ ส่งเสริมความคิดทางคณิตศาสตร์ที่น่าสนใจและสำคัญสู่ผู้เรียนได้อย่างเหมาะสม

วัชร กาญจน์กิริติ

20 ตุลาคม 2554

สารบัญ

	หน้า
บทที่ 1 การเรียนรู้คณิตศาสตร์	1
1.1 ทำไมต้องเรียนคณิตศาสตร์	1
1.2 เรียนรู้อะไรในคณิตศาสตร์	1
1.3 คุณภาพผู้เรียน	4
บทที่ 2 แนวคิดเกี่ยวกับการจัดการเรียนการสอนคณิตศาสตร์	9
2.1 ความสำคัญและธรรมชาติของคณิตศาสตร์	9
2.2 ลักษณะสำคัญของวิชาคณิตศาสตร์	9
2.3 การเรียนรู้คณิตศาสตร์	10
2.4 หลักและแนวการจัดการเรียนการสอนคณิตศาสตร์	14
2.5 กระบวนการเรียนการสอนคณิตศาสตร์	16
2.6 ปัญหาในการเรียนการสอนคณิตศาสตร์	17
บทที่ 3 ทำไมเด็กไทยอ่อนคณิตศาสตร์	19
3.1 อะไรคือปัญหา	19
3.2 ปัญหาเกี่ยวกับนักเรียน	24
3.3 ปัญหาเกี่ยวกับครู	26
3.4 ทฤษฎีการสอนคณิตศาสตร์	27

บทที่ 4	ปัญหาทางคณิตศาสตร์	29
4.1	ยุทธวิธีการแก้ปัญหทางคณิตศาสตร์	29
4.2	ตัวอย่างการแก้ปัญหตามยุทธวิธี	32
4.3	การสร้างความสัมพันธ์ของปัญหาคณิตศาสตร์	51
4.4	การจัดระบบการคิด	56
บทที่ 5	กระบวนการคิดทางคณิตศาสตร์	63
5.1	การพัฒนาความสามารถในการคิด	64
5.2	แนวการสอนเพื่อพัฒนาการคิด	66
5.3	ตัวอย่างการฝึกทักษะกระบวนการคิด	67
บทที่ 6	การแก้ปัญหาคณิตศาสตร์	73
6.1	ความสำคัญและความเป็นมาของปัญหา	73
6.2	ความหมายของปัญหาทางคณิตศาสตร์	75
6.3	ลักษณะของปัญหาคณิตศาสตร์ที่ดี	73
6.4	ปัญหาที่ดีต้องมีสิ่งต่อไปนี้	76
6.5	ตัวอย่างการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์	76
บทที่ 7	สื่อการสอน	89
7.1	สื่อการสอนคืออะไร	89
7.2	ประเภทของสื่อการสอน	90
7.3	การใช้สื่อการสอน	92
7.4	การวัดและการประเมินสื่อการสอน	92
7.5	ตัวอย่างสื่อการสอน	93

บทที่ 8	การจัดค่ายคณิตศาสตร์	105
8.1	ค่ายคณิตศาสตร์คืออะไร	105
8.2	ขั้นตอนการจัดค่ายคณิตศาสตร์	108
8.3	หลักการจัดค่ายคณิตศาสตร์	109
8.4	Math Camp	109
8.5	Math Day	111
8.6	Math Project Camp	112
บทที่ 9	กระบวนการแก้ปัญหา	125
9.1	Model Method	126
9.2	การใช้ตารางเพื่อแก้ปัญหา	131
9.3	ข้อสอบของสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์	133
บทที่ 10	การวิจัยในชั้นเรียน	141
10.1	แนวคิดของการวิจัยในชั้นเรียน	143
10.2	วิธีการวิจัยในชั้นเรียน	147
10.3	การใช้และการเผยแพร่ผลงานการวิจัยในชั้นเรียน	154
บรรณานุกรม		159

บทที่ 1

การเรียนรู้คณิตศาสตร์

1.1 ทำไมต้องเรียนคณิตศาสตร์

คณิตศาสตร์มีบทบาทสำคัญยิ่งต่อการพัฒนาความคิดมนุษย์ ทำให้มนุษย์มีความคิดสร้างสรรค์ คิดอย่างมีเหตุผล เป็นระบบ มีแบบแผน สามารถวิเคราะห์ปัญหาหรือสถานการณ์ได้อย่างถี่ถ้วนรอบคอบ ช่วยให้คาดการณ์ วางแผน ตัดสินใจ แก้ปัญหา และนำไปใช้ในชีวิตประจำวันได้อย่างถูกต้องเหมาะสม นอกจากนี้คณิตศาสตร์ยังเป็นเครื่องมือในการศึกษาทางด้านวิทยาศาสตร์ เทคโนโลยีและศาสตร์อื่น ๆ คณิตศาสตร์จึงมีประโยชน์ต่อการดำเนินชีวิต ช่วยพัฒนาคุณภาพชีวิตให้ดีขึ้น และสามารถอยู่ร่วมกับผู้อื่นได้อย่างมีความสุข

1.2 เรียนรู้อะไรในคณิตศาสตร์

กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์เปิดโอกาสให้เยาวชนทุกคนได้เรียนรู้คณิตศาสตร์อย่างต่อเนื่อง ตามศักยภาพ โดยกำหนดสาระหลักที่จำเป็นสำหรับผู้เรียนทุกคนดังนี้

- **จำนวนและการดำเนินการ:** ความคิดรวบยอดและความรู้ลึกเชิงจำนวน ระบบจำนวนจริง สมบัติเกี่ยวกับจำนวนจริง การดำเนินการของจำนวน อัตราส่วน ร้อยละ การแก้ปัญหเกี่ยวกับจำนวน และการใช้จำนวนในชีวิตจริง
- **การวัด:** ความยาว ระยะทาง น้ำหนัก พื้นที่ ปริมาตรและความจุ เงินและเวลา หน่วยวัดระบบต่าง ๆ การคาดคะเนเกี่ยวกับการวัด อัตราส่วนตรีโกณมิติ การแก้ปัญหเกี่ยวกับการวัด และการนำความรู้เกี่ยวกับการวัดไปใช้ในสถานการณ์ต่าง ๆ
- **เรขาคณิต:** รูปเรขาคณิตและสมบัติของรูปเรขาคณิตหนึ่งมิติ สองมิติ และสามมิติ การนิยามภาพ แบบจำลองทางเรขาคณิต ทฤษฎีบททางเรขาคณิต การแปลงทางเรขาคณิต (geometric transformation) ในเรื่องการเลื่อนขนาน (translation) การสะท้อน (reflection) และการหมุน (rotation)
- **พีชคณิต:** แบบรูป (pattern) ความสัมพันธ์ ฟังก์ชัน เซตและการดำเนินการของเซต การให้เหตุผล นิพจน์ สมการ ระบบสมการ อสมการ กราฟ ลำดับเลขคณิต ลำดับเรขาคณิต อนุกรมเลขคณิต และอนุกรมเรขาคณิต

- **การวิเคราะห์ข้อมูลและความน่าจะเป็น:** การกำหนดประเด็น การเขียนข้อคำถาม การกำหนดวิธีการศึกษา การเก็บรวบรวมข้อมูล การจัดระบบข้อมูล การนำเสนอข้อมูล ค่ากลางและการกระจายของข้อมูล การวิเคราะห์และการแปลความข้อมูล การสำรวจความคิดเห็น ความน่าจะเป็น การใช้ความรู้เกี่ยวกับสถิติและความน่าจะเป็นในการอธิบายเหตุการณ์ต่างๆ และช่วยในการตัดสินใจในการดำเนินชีวิตประจำวัน

- **ทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์:** การแก้ปัญหาด้วยวิธีการที่หลากหลาย การให้เหตุผล การสื่อสาร การสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์และการนำเสนอ การเชื่อมโยงความรู้ต่างๆ ทางคณิตศาสตร์ และการเชื่อมโยงคณิตศาสตร์กับศาสตร์อื่นๆ และความคิดริเริ่มสร้างสรรค์

สาระและมาตรฐานการเรียนรู้

สาระที่ 1 จำนวนและการดำเนินการ

มาตรฐาน ค 1.1 เข้าใจถึงความหลากหลายของการแสดงจำนวนและการใช้จำนวนในชีวิตจริง

มาตรฐาน ค 1.2 เข้าใจถึงผลที่เกิดขึ้นจากการดำเนินการของจำนวนและความสัมพันธ์ระหว่างการดำเนินการต่างๆ และสามารถใช้ในการดำเนินการในการแก้ปัญหา

มาตรฐาน ค 1.3 ใช้การประมาณค่าในการคำนวณและแก้ปัญหา

มาตรฐาน ค 1.4 เข้าใจระบบจำนวนและนำเสนอเกี่ยวกับจำนวนไปใช้

สาระที่ 2 การวัด

มาตรฐาน ค 2.1 เข้าใจพื้นฐานเกี่ยวกับการวัด วัดและคาดคะเนขนาดของสิ่งที่ต้องการวัด

มาตรฐาน ค 2.2 แก้ปัญหาเกี่ยวกับการวัด

สาระที่ 3 เรขาคณิต

มาตรฐาน ค 3.1 อธิบายและวิเคราะห์รูปเรขาคณิตสองมิติและสามมิติ

มาตรฐาน ค 3.2 ใช้การนิภาพ (visualization) ใช้เหตุผลเกี่ยวกับปริภูมิ (spatial reasoning) และใช้แบบจำลองทางเรขาคณิต (geometric model) ในการแก้ปัญหา

สาระที่ 4 พิชคณิต

มาตรฐาน ค 4.1 เข้าใจและวิเคราะห์แบบรูป (pattern) ความสัมพันธ์ และฟังก์ชัน

มาตรฐาน ค 4.2 ใช้นิพจน์ สมการ อสมการ กราฟ และตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ (mathematical model) อื่น ๆ แทนสถานการณ์ต่างๆ ตลอดจนแปลความหมาย และนำไปใช้แก้ปัญหา

สาระที่ 5 การวิเคราะห์ข้อมูลและความน่าจะเป็น

มาตรฐาน ค 5.1 เข้าใจและใช้วิธีการทางสถิติในการวิเคราะห์ข้อมูล

มาตรฐาน ค 5.2 ใช้วิธีการทางสถิติและความรู้เกี่ยวกับความน่าจะเป็นในการคาดการณ์ได้อย่างสมเหตุสมผล

มาตรฐาน ค 5.3 ใช้ความรู้เกี่ยวกับสถิติและความน่าจะเป็นช่วยในการตัดสินใจและแก้ปัญหา

สาระที่ 6 ทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์

มาตรฐาน ค 6.1 มีความสามารถในการแก้ปัญหา การให้เหตุผล การสื่อสาร การสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์และการนำเสนอ การเชื่อมโยงความรู้ต่าง ๆ ทางคณิตศาสตร์และเชื่อมโยงคณิตศาสตร์กับศาสตร์อื่น ๆ และมีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์

- หมายเหตุ 1. การจัดการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ที่ทำให้ผู้เรียนเกิดการเรียนรู้อย่างมีคุณภาพนั้น จะต้องให้มีความสมดุลระหว่างสาระด้านความรู้ ทักษะและกระบวนการ ควบคู่ไปกับคุณธรรม จริยธรรม และค่านิยมที่พึงประสงค์ ได้แก่ การทำงานอย่างมีระบบ มีระเบียบ มีความรอบคอบ มีความรับผิดชอบ มีวิจารณญาณ มีความเชื่อมั่นในตนเอง พร้อมทั้งตระหนักในคุณค่าและมีเจตคติที่ดีต่อคณิตศาสตร์
2. ในการวัดและประเมินผลด้านทักษะและกระบวนการ สามารถประเมินในระหว่างการเรียนการสอน หรือประเมินไปพร้อมกับการประเมินด้านความรู้

1.3 คุณภาพผู้เรียน

จบชั้นประถมศึกษาปีที่ 3

- มีความรู้ความเข้าใจและความรู้สึกเชิงจำนวนเกี่ยวกับจำนวนนับไม่เกินหนึ่งแสนและศูนย์ และการดำเนินการของจำนวน สามารถแก้ปัญหาเกี่ยวกับการบวก การลบ การคูณ และการหาร พร้อมทั้งตระหนักถึงความสมเหตุสมผลของคำตอบที่ได้
- มีความรู้ความเข้าใจเกี่ยวกับความยาว ระยะทาง น้ำหนัก ปริมาตร ความจุ เวลาและเงิน สามารถวัดได้อย่างถูกต้องและเหมาะสม และนำความรู้เกี่ยวกับการวัดไปใช้แก้ปัญหาในสถานการณ์ต่าง ๆ ได้
- มีความรู้ความเข้าใจเกี่ยวกับรูปสามเหลี่ยม รูปสี่เหลี่ยม รูปวงกลม รูปวงรี ทรงสี่เหลี่ยมมุมฉาก ทรงกลม ทรงกระบอก รวมทั้ง จุด ส่วนของเส้นตรง รังสี เส้นตรง และมุม
- มีความรู้ความเข้าใจเกี่ยวกับแบบรูป และอธิบายความสัมพันธ์ได้
- รวบรวมข้อมูล และจำแนกข้อมูลเกี่ยวกับตนเองและสิ่งแวดล้อมใกล้ตัวที่พบเห็นในชีวิตประจำวัน และอภิปรายประเด็นต่าง ๆ จากแผนภูมิรูปภาพและแผนภูมิแท่งได้
- ใช้วิธีการที่หลากหลายแก้ปัญหา ใช้ความรู้ ทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ในการแก้ปัญหาในสถานการณ์ต่าง ๆ ได้อย่างเหมาะสม ให้เหตุผลประกอบการตัดสินใจ และสรุปผลได้อย่างเหมาะสม ใช้ภาษาและสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ในการสื่อสาร การสื่อความหมาย และการนำเสนอได้อย่างถูกต้อง เชื่อมโยงความรู้ต่าง ๆ ในคณิตศาสตร์และเชื่อมโยงคณิตศาสตร์กับศาสตร์อื่น ๆ มีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์

จบชั้นประถมศึกษาปีที่ 6

- มีความรู้ความเข้าใจและความรู้สึกเชิงจำนวนเกี่ยวกับจำนวนนับและศูนย์ เศษส่วน ทศนิยมไม่เกินสามตำแหน่ง ร้อยละ การดำเนินการของจำนวน สมบัติเกี่ยวกับจำนวน สามารถแก้ปัญหาเกี่ยวกับการบวก การลบ การคูณ และการหารจำนวนนับ เศษส่วน ทศนิยมไม่เกินสามตำแหน่ง และร้อยละ พร้อมทั้งตระหนักถึงความสมเหตุสมผลของคำตอบที่ได้ สามารถหาค่าประมาณของจำนวนนับและทศนิยมไม่เกินสามตำแหน่งได้
- มีความรู้ความเข้าใจเกี่ยวกับความยาว ระยะทาง น้ำหนัก พื้นที่ ปริมาตร ความจุ เวลา เงิน ทิศ แผนที่ และขนาดของมุม สามารถวัดได้อย่างถูกต้องและเหมาะสม และนำความรู้เกี่ยวกับการวัดไปใช้แก้ปัญหาในสถานการณ์ต่าง ๆ ได้

- มีความรู้ความเข้าใจเกี่ยวกับลักษณะและสมบัติของรูปสามเหลี่ยม รูปสี่เหลี่ยม รูปวงกลม ทรงสี่เหลี่ยมมุมฉาก ทรงกระบอก กรวย ปริซึม พีระมิด มุม และเส้นขนาน
- มีความรู้ความเข้าใจเกี่ยวกับแบบรูปและอธิบายความสัมพันธ์ได้ แก้ปัญหาเกี่ยวกับแบบรูป สามารถวิเคราะห์สถานการณ์หรือปัญหาพร้อมทั้งเขียนให้อยู่ในรูปของสมการเชิงเส้นที่มีตัวไม่ทราบค่าหนึ่งตัวและแก้สมการนั้นได้
- รวบรวมข้อมูล อภิปรายประเด็นต่าง ๆ จากแผนภูมิรูปภาพ แผนภูมิแท่ง แผนภูมิแท่งเปรียบเทียบ แผนภูมิรูปวงกลม กราฟเส้น และตาราง และนำเสนอข้อมูลในรูปของแผนภูมิรูปภาพ แผนภูมิแท่ง แผนภูมิแท่งเปรียบเทียบ และกราฟเส้น ใช้ความรู้เกี่ยวกับความน่าจะเป็นเบื้องต้นในการคาดคะเนการเกิดขึ้นของเหตุการณ์ต่าง ๆ ได้
- ใช้วิธีการที่หลากหลายแก้ปัญหา ใช้ความรู้ ทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์และเทคโนโลยีในการแก้ปัญหาในสถานการณ์ต่าง ๆ ได้อย่างเหมาะสม ให้เหตุผลประกอบการตัดสินใจและสรุปผลได้อย่างเหมาะสม ใช้ภาษาและสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ในการสื่อสาร การสื่อความหมาย และการนำเสนอได้อย่างถูกต้องและเหมาะสม เชื่อมโยงความรู้ต่าง ๆ ในคณิตศาสตร์และเชื่อมโยงคณิตศาสตร์กับศาสตร์อื่น ๆ และมีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์

จบชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3

- มีความคิดรวบยอดเกี่ยวกับจำนวนจริง มีความเข้าใจเกี่ยวกับอัตราส่วน สัดส่วน ร้อยละ เลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนเต็ม รากที่สองและรากที่สามของจำนวนจริง สามารถดำเนินการเกี่ยวกับจำนวนเต็ม เศษส่วน ทศนิยม เลขยกกำลัง รากที่สองและรากที่สามของจำนวนจริง ใช้การประมาณค่าในการดำเนินการและแก้ปัญหา และนำความรู้เกี่ยวกับจำนวนไปใช้ในชีวิตจริงได้
- มีความรู้ความเข้าใจเกี่ยวกับพื้นที่ผิวของปริซึม ทรงกระบอก และปริมาตรของปริซึม ทรงกระบอก พีระมิด กรวย และทรงกลม เลือกใช้หน่วยการวัดในระบบต่าง ๆ เกี่ยวกับความยาว พื้นที่ และปริมาตรได้อย่างเหมาะสม พร้อมทั้งสามารถนำความรู้เกี่ยวกับการวัดไปใช้ในชีวิตจริงได้
- สามารถสร้างและอธิบายขั้นตอนการสร้างรูปเรขาคณิตสองมิติโดยใช้วงเวียนและสันตรง อธิบายลักษณะและสมบัติของรูปเรขาคณิตสามมิติซึ่งได้แก่ ปริซึม พีระมิด ทรงกระบอก กรวย และทรงกลมได้
- มีความเข้าใจเกี่ยวกับสมบัติของความเท่ากันทุกประการและความคล้ายของรูปสามเหลี่ยม เส้นขนาน ทฤษฎีบทพีทาโกรัสและบทกลับ และสามารถนำสมบัติเหล่านั้นไปใช้ในการให้เหตุผลและแก้ปัญหาได้ มีความเข้าใจเกี่ยวกับการแปลงทางเรขาคณิต(geometric

transformation)ในเรื่องการเลื่อนขนาน(translation) การสะท้อน (reflection) และการหมุน (rotation) และนำไปใช้ได้

- สามารถนิยามและอธิบายลักษณะของรูปเรขาคณิตสองมิติและสามมิติ
- สามารถวิเคราะห์และอธิบายความสัมพันธ์ของแบบรูป สถานการณ์หรือปัญหา และสามารถใช้สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว ระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร อสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว และกราฟในการแก้ปัญหาได้
- สามารถกำหนดประเด็น เขียนข้อความเกี่ยวกับปัญหาหรือสถานการณ์ กำหนดวิธีการศึกษา เก็บรวบรวมข้อมูลและนำเสนอข้อมูลโดยใช้แผนภูมิรูปวงกลม หรือรูปแบบอื่นที่เหมาะสมได้
- เข้าใจค่ากลางของข้อมูลในเรื่องค่าเฉลี่ยเลขคณิต มัธยฐาน และฐานนิยมของข้อมูลที่ยังไม่ได้แจกแจงความถี่ และเลือกใช้ได้อย่างเหมาะสม รวมทั้งใช้ความรู้ในการพิจารณาข้อมูลข่าวสารทางสถิติ
- เข้าใจเกี่ยวกับการทดลองสุ่ม เหตุการณ์ และความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ สามารถใช้ความรู้เกี่ยวกับความน่าจะเป็นในการคาดการณ์และประกอบการตัดสินใจในสถานการณ์ต่าง ๆ ได้
- ใช้วิธีการที่หลากหลายแก้ปัญหา ใช้ความรู้ ทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ และเทคโนโลยีในการแก้ปัญหาในสถานการณ์ ต่าง ๆ ได้อย่างเหมาะสม ให้เหตุผลประกอบการตัดสินใจ และสรุปผลได้อย่างเหมาะสม ใช้ภาษาและสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ในการสื่อสาร การสื่อความหมาย และการนำเสนอ ได้อย่างถูกต้อง และชัดเจน เชื่อมโยงความรู้ต่าง ๆ ในคณิตศาสตร์ และนำความรู้ หลักการ กระบวนการทางคณิตศาสตร์ไปเชื่อมโยงกับศาสตร์อื่น ๆ และมีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์

จบชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6

- มีความคิดรวบยอดเกี่ยวกับระบบจำนวนจริง ค่าสัมบูรณ์ของจำนวนจริง จำนวนจริงที่อยู่ในรูปกรณฑ์ และจำนวนจริงที่อยู่ในรูปเลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนตรรกยะ หาค่าประมาณของจำนวนจริงที่อยู่ในรูปกรณฑ์ และจำนวนจริงที่อยู่ในรูปเลขยกกำลังโดยใช้วิธีการคำนวณที่เหมาะสมและสามารถนำสมบัติของจำนวนจริงไปใช้ได้
- นำความรู้เรื่องอัตราส่วนตรีโกณมิติไปใช้คาดคะเนระยะทาง ความสูง และแก้ปัญหาเกี่ยวกับการวัดได้

- มีความคิดรวบยอดในเรื่องเซต การดำเนินการของเซต และใช้ความรู้เกี่ยวกับแผนภาพเวนน์-ออยเลอร์แสดงเซตไปใช้แก้ปัญหา และตรวจสอบความสมเหตุสมผลของการให้เหตุผล
- เข้าใจและสามารถใช้การให้เหตุผลแบบอุปนัยและนิรนัยได้
- มีความคิดรวบยอดเกี่ยวกับความสัมพันธ์และฟังก์ชัน สามารถใช้ความสัมพันธ์และฟังก์ชันแก้ปัญหาในสถานการณ์ต่าง ๆ ได้
- เข้าใจความหมายของลำดับเลขคณิต ลำดับเรขาคณิต และสามารถหาพจน์ทั่วไปได้ เข้าใจความหมายของผลบวกของ n พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิต อนุกรมเรขาคณิต และหาผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิต และอนุกรมเรขาคณิตโดยใช้สูตรและนำไปใช้ได้
- รู้และเข้าใจการแก้สมการ และอสมการตัวแปรเดียวดีกรีไม่เกินสอง รวมทั้งใช้กราฟของสมการ อสมการ หรือฟังก์ชันในการแก้ปัญหา
- เข้าใจวิธีการสำรวจความคิดเห็นอย่างง่าย เลือกใช้ค่ากลางได้เหมาะสมกับข้อมูลและวัตถุประสงค์ สามารถหาค่าเฉลี่ยเลขคณิต มัธยฐาน ฐานนิยม ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานและเปอร์เซ็นต์ไทล์ของข้อมูล วิเคราะห์ข้อมูล และนำผลจากการวิเคราะห์ข้อมูลไปช่วยในการตัดสินใจ
- เข้าใจเกี่ยวกับการทดลองสุ่ม เหตุการณ์ และความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ สามารถใช้ความรู้เกี่ยวกับความน่าจะเป็นในการคาดการณ์ ประกอบการตัดสินใจ และแก้ปัญหาในสถานการณ์ต่าง ๆ ได้
- ใช้วิธีการที่หลากหลายแก้ปัญหา ใช้ความรู้ ทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ และเทคโนโลยีในการแก้ปัญหาในสถานการณ์ต่าง ๆ ได้อย่างเหมาะสม ให้เหตุผลประกอบการตัดสินใจ และสรุปผลได้อย่างเหมาะสม ใช้ภาษาและสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ในการสื่อสาร การสื่อความหมาย และการนำเสนอ ได้อย่างถูกต้อง และชัดเจน เชื่อมโยงความรู้ต่าง ๆ ในคณิตศาสตร์ และนำความรู้ หลักการ กระบวนการทางคณิตศาสตร์ไปเชื่อมโยงกับศาสตร์อื่น ๆ และมีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์

บทที่ 2

แนวคิดเกี่ยวกับการจัดการเรียนการสอนคณิตศาสตร์

2.1 ความสำคัญและธรรมชาติของคณิตศาสตร์

คณิตศาสตร์มีบทบาทสำคัญอย่างยิ่งต่อการพัฒนาความคิดของมนุษย์ ทำให้มนุษย์มีความคิดสร้างสรรค์ คิดอย่างมีเหตุผล เป็นระบบ ระเบียบ มีแบบแผน สามารถวิเคราะห์ปัญหาและสถานการณ์ได้อย่างถี่ถ้วนรอบคอบ ทำให้สามารถคาดการณ์ วางแผน ตัดสินใจ และแก้ปัญหาได้อย่างถูกต้องและเหมาะสม

คณิตศาสตร์เป็นเครื่องมือในการศึกษาวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี ตลอดจนศาสตร์อื่นๆ ที่เกี่ยวข้องกับคณิตศาสตร์จึงมีประโยชน์ต่อการดำรงชีวิตและช่วยพัฒนาคุณภาพชีวิตให้ดีขึ้น นอกจากนี้คณิตศาสตร์ยังช่วยพัฒนามนุษย์ให้สมบูรณ์ มีความสมดุลทั้งทางร่างกาย จิตใจ สติปัญญา และอารมณ์ สามารถคิดเป็น ทำเป็น แก้ปัญหาเป็น และสามารถอยู่ร่วมกับผู้อื่นได้อย่างมีความสุข

คณิตศาสตร์มีลักษณะเป็นนามธรรม มีโครงสร้างซึ่งประกอบด้วยคำนิยาม บทนิยาม สัจพจน์ ที่เป็นข้อตกลงเบื้องต้น จากนั้นจึงใช้การเหตุผลที่สมเหตุสมผลสร้างทฤษฎีบทต่างๆ ขึ้นและนำไปใช้อย่างเป็นระบบ คณิตศาสตร์มีความถูกต้องเที่ยงตรง คงเส้นคงวา มีระเบียบแบบแผน เป็นเหตุเป็นผล และมีความสมบูรณ์ในตัวเอง

คณิตศาสตร์เป็นทั้งศาสตร์และศิลป์ที่ศึกษาเกี่ยวกับแบบรูปและความสัมพันธ์ เพื่อให้ได้ข้อสรุปและนำไปใช้ประโยชน์ คณิตศาสตร์มีลักษณะเป็นภาษาสากลที่ทุกคนเข้าใจตรงกันในการสื่อสาร สื่อความหมาย และถ่ายทอดความรู้ระหว่างศาสตร์ต่างๆ

2.2 ลักษณะสำคัญของวิชาคณิตศาสตร์

คณิตศาสตร์เป็นวิชาที่สำคัญวิชาหนึ่ง ซึ่งคณิตศาสตร์มิใช่มีความหมายเพียงตัวเลขเท่านั้น คณิตศาสตร์มีความหมายกว้างมาก ซึ่งอาจสรุปได้ดังนี้

1. คณิตศาสตร์ เป็นวิชาที่เกี่ยวกับความคิด เราใช้คณิตศาสตร์พิสูจน์อย่างมีเหตุผลว่าสิ่งที่เราคิดขึ้นนั้นเป็นจริงหรือไม่ คณิตศาสตร์ช่วยให้คนเป็นผู้ที่มีเหตุผล เป็นคนใฝ่หาความรู้ตลอดจนพยายามคิดค้นสิ่งที่แปลกและใหม่ ฉะนั้นคณิตศาสตร์จึงเป็นพื้นฐานแห่งความเจริญของเทคโนโลยีด้านต่างๆ เนื่องจากมนุษย์เราจะต้องตอบปัญหาต่างๆ อยู่เรื่อย เช่น นักเรียนห้องนี้มีกี่คน นกกรงนี้มีกี่ตัว มีคนตายกี่คน จึงเกิดจำนวนนับ เกิดวิชาเลขคณิตขึ้น ถ้าเพิ่ม 1 คนใช้วิธีบวก ถ้ามลบ 1 คนใช้วิธีลบ

2. คณิตศาสตร์เป็นวิชาที่เกี่ยวกับความคิดของมนุษย์ มนุษย์สร้างสัญลักษณ์แทนความคิดนั้น ๆ และสร้างกฎในการนำสัญลักษณ์มาใช้ เพื่อสื่อความหมายให้เข้าใจตรงกัน คณิตศาสตร์จึงมีภาษาเฉพาะของตัวเอง เป็นภาษากำหนดขึ้นด้วยสัญลักษณ์ที่รัดกุมและสื่อความหมายได้ถูกต้อง เป็นภาษาที่มีตัวอักษร ตัวเลข และสัญลักษณ์ แบบความคิดเป็นภาษาที่ทุกชาติทุกภาษาที่เรียนคณิตศาสตร์ จะเข้าใจตรงกัน

3. คณิตศาสตร์เป็นวิชาที่มีรูปแบบ (Pattern) เราจะเห็นว่าการคิดทางคณิตศาสตร์นั้นต้องมีแบบแผน มีรูปแบบไม่ว่าจะคิดเรื่องใดก็ตาม ทุกขั้นตอนจะตอบได้และมีจำแนกออกมาให้เห็นจริง

4. คณิตศาสตร์เป็นวิชาที่มีโครงสร้างเหตุผล คณิตศาสตร์จะเริ่มต้นด้วยเรื่องง่ายก่อน เช่น เริ่มต้นด้วยการบวก การลบ การคูณ การหาร เรื่องง่าย ๆ นี้จะเป็นพื้นฐานนำไปสู่เรื่องอื่น ๆ ต่อไป เช่น เรื่องเศษส่วน ทศนิยม ร้อยละ เป็นต้น

5. คณิตศาสตร์เป็นศิลปะอย่างหนึ่ง เช่นเดียวกับศิลปะอื่นๆ ความงามของคณิตศาสตร์ก็คือ ความมีระเบียบและความกลมกลืน นักคณิตศาสตร์ได้พยายามแสดงความคิด มีความคิดสร้างสรรค์ มีจินตนาการ มีความคิดริเริ่มที่จะแสดงความคิดใหม่ ๆ และแสดงโครงสร้างใหม่ ๆ ทางคณิตศาสตร์ ออกมา

คณิตศาสตร์มีความสำคัญในการดำรงชีวิตของเราในสังคมเป็นอย่างมาก เพราะเป็นวิชาที่มีความจำเป็นต้องใช้ในการประกอบอาชีพต่างๆ ในชีวิตประจำวัน ฝึกให้รู้จักคิดพิจารณา รู้จักใช้เหตุผลต่างๆ แก้ปัญหาที่ยุ่งยากได้อย่างมีระเบียบแบบแผน ซึ่งคณิตศาสตร์เป็นตัวสร้างให้เกิดความเข้าใจเร็วขึ้น

2.3 การเรียนรู้คณิตศาสตร์

การเรียนรู้คือ การเปลี่ยนแปลงพฤติกรรมจากการได้รับประสบการณ์ และประสบการณ์นั้นทำให้เปลี่ยนแปลงพฤติกรรมไปจากเดิม ซึ่งในการเรียนการสอนไม่ว่าจะเป็นวิชาใดก็ตาม ครูจะต้องรู้จักวิทยาในการสอน เพื่อให้การสอนสมบูรณ์และมีประสิทธิภาพ วิทยายาบางประการที่ครูควรทราบมีดังนี้

1. ความแตกต่างระหว่างบุคคล (Individual Differences) นักเรียนย่อมมีความแตกต่างกันทั้งในด้านสติปัญญา อารมณ์ จิตใจ และลักษณะนิสัย ดังนั้น ในการจัดการเรียนการสอนครูต้องคำนึงถึงเรื่องนี้ในการจัดชั้นเรียนนั้น โดยทั่วไปครูมักจะจัดชั้นเรียนโดยมีนักเรียน ซึ่งมีความสามารถละกันไป โดยมีได้คำนึงถึงว่านักเรียนนั้นมีความแตกต่างกัน ซึ่งจะทำให้ผลการสอนไม่ดีเท่าที่ควร ดังนั้นในการจัดชั้นเรียนครูควรคำนึงถึง

1.1 ความแตกต่างของนักเรียนภายในกลุ่มเดียวกัน เพราะนักเรียนนั้นมีความแตกต่างกันทั้งทางร่างกาย ความสามารถ บุคลิกภาพ ครูจะสอนทุกคนให้เหมือนกันนั้นเป็นไปได้ ครูจึงต้องศึกษาดูว่านักเรียนแต่ละคนนั้นมีปัญหาอย่างไร

1.2 ความแตกต่างระหว่างกลุ่มของนักเรียน เช่น ครูอาจจะแบ่งนักเรียนออกตามความสามารถ (Ability Grouping) ว่านักเรียนมีความเก่ง อ่อน ต่างกันอย่างไร เมื่อครูทราบแล้วจะได้สอนให้สอดคล้องกับความสนใจของนักเรียนเท่านั้น

การสอนนั้นนอกจากจะคำนึงถึงความแตกต่างระหว่างกลุ่มแล้ว ตัวครูจะต้องพยายามที่จะสอนบุคคลเหล่านี้ เพราะนักเรียนแต่ละคนไม่เหมือนกัน นักเรียนที่เรียนเก่งก็จะทำโจทย์คณิตศาสตร์ได้คล่อง แต่นักเรียนที่เรียนอ่อนก็จะทำไม่ทันเพื่อน ซึ่งอาจจะทำให้นักเรียนที่ถอย ครูจะต้องคอยให้กำลังใจแก่เขา การสอนนั้นครูจะต้องพยายามดังนี้

1.3 ศึกษา นักเรียนแต่ละบุคคล ดูความแตกต่างเสียก่อน แล้ววินิจฉัยว่า แต่ละคนประสบปัญหาในการเรียนคณิตศาสตร์อย่างไร

1.4 วางแผนการสอนให้สอดคล้องกับความแตกต่างของนักเรียน ถ้านักเรียนเก่งก็ส่งเสริมให้ก้าวหน้า โดยการให้ฝึกทักษะการทำแบบฝึกหัดที่ยากขึ้น และสอดแทรกความรู้ต่างๆ ให้ส่วนนักเรียนที่เรียนอ่อนก็พยายามหาทางช่วยเหลือด้วยการสอนซ่อมเสริม ทำแบบฝึกหัดที่สนุกทำให้ไม่เบื่อการเรียน และเป็นการเพิ่มทักษะในทางคณิตศาสตร์มากขึ้น

1.5 ครูต้องรู้จักหาวิธีแปลกๆ ใหม่ๆ มาสอน เช่น การสอนนักเรียนที่อ่อน ก็รู้จักใช้รูปแบบมาอธิบายนามธรรม ให้นักเรียนเรียนด้วยความสนุกสนาน เพลิดเพลิน เช่น อาจจะใช้ เพลง กลอน เกม ปริศนา การ์ตูน

1.6 ครูต้องรู้จักหาเอกสารประกอบการสอนมาเสริมการเรียนรู้ของนักเรียน เช่น นักเรียนเก่งก็ให้ทำแบบฝึกหัดเสริมให้ก้าวหน้ายิ่งขึ้น นักเรียนอ่อนก็ทำแบบฝึกหัดง่ายไปสู่ยากเป็นแบบฝึกหัดเสริมทักษะให้นักเรียนค่อยๆ ทำไป

1.7 การสอนนักเรียนที่มีความแตกต่างกันนั้น สิ่งสำคัญที่สุดคือ ครูจะต้องมีความอดทน เช่น ใฝ่หาความรู้ เสียสละเวลา จึงจะสามารถสอนนักเรียนที่มีความสามารถแตกต่างกันอย่างมีประสิทธิภาพ

2. จิตวิทยาในการเรียนรู้

การสอนนักเรียนนั้นก็เพื่อให้นักเรียนเกิดการพัฒนาขึ้น ครูจะต้องนึกอยู่เสมอว่า จะทำให้นักเรียนพัฒนาไปสู่จุดประสงค์ที่ต้องการอย่างไร นักเรียนจะเกิดการเรียนรู้ก็ต่อเมื่อเกิดการเปลี่ยนแปลงพฤติกรรมดังต่อไปนี้

2.1 การเปลี่ยนแปลงพฤติกรรม เมื่อนักเรียนได้รับประสบการณ์ใดประสบการณ์หนึ่งเป็นครั้งแรก เขาก็มีความอยากรู้อยากเห็น และอยากจะทำซ้ำได้ วิธีนี้จึงจะเป็นการลงมือทดลองดู แต่เมื่อเขาอยากได้รับประสบการณ์นั้นอีกครั้งหนึ่งเขาจะสามารถทำได้ แสดงว่าเขาเกิดการเรียนรู้

2.2 การถ่ายทอดการเรียนรู้

- นักเรียนจำได้รับการถ่ายทอดการเรียนรู้ที่ต่อเมื่อ เห็นสถานการณ์ที่คล้ายคลึงกันหลายๆ ตัวอย่าง
 - ครูควรจะให้แก่นักเรียนให้รู้จักสังเกตรูปแบบของสิ่งที่คล้ายคลึงกัน แล้วเขาก็จะสามารถสรุปว่าแบบนั้นเป็นอย่างไร
 - รู้จักนำเรื่องที่เคยเรียนแล้วในอดีตมาเปรียบเทียบ หรือใช้กับเรื่องที่จะต้องเรียนใหม่
 - ควรจะให้แก่นักเรียนได้เรียนอย่างประสบผลสำเร็จไปเป็นเรื่อยๆ เพราะถ้าเขาทำเรื่องใดสำเร็จเขาก็จะสามารถถ่ายทอดไปยังเรื่องอื่นได้ ดังนั้นครูควรพยายามให้นักเรียนสรุปได้ด้วยตนเอง จะทำให้เขาเข้าใจ และจำได้นานเมื่อเขาจำได้เขาก็จะนำไปใช้กับเรื่องอื่นๆ ได้
 - การถ่ายทอดการเรียนรู้จะสำเร็จผลมากน้อยเพียงไรขึ้นอยู่กับวิธีสอนของครู ดังนั้นครูจะต้องตระหนักอยู่เสมอว่า จะสอนอะไร และสอนอย่างไร

การสอนเพื่อให้เกิดการเรียนรู้นั้นควรจะมีหลักดังนี้

- ให้นักเรียนเกิดมโนคติ (concept) ด้วยตนเองและนำไปสู่ข้อสรุปได้ นอกจากนี้ยังสามารถนำข้อสรุปนั้นไปใช้ได้
 - ครูจะต้องเน้นในขณะที่สอนแลแยกแยะให้นักเรียนเห็นองค์ประกอบในเรื่องที่กำลังเรียน
 - ครูควรจะต้องฝึกนักเรียนให้รู้จักใช้หลักการจากเรื่องที่เรียนจบแล้วในสถานการณ์ที่มีองค์ประกอบคล้ายคลึงกันแต่ซับซ้อนยิ่งขึ้น
 - ครูจะต้องใช้กลวิธีหลายๆ อย่างในการเรียนการสอน

2.3 ธรรมชาติของการเกิดการเรียนรู้

นักเรียนจะเกิดการเรียนรู้ขึ้นได้ นักเรียนจะต้องรู้ในเรื่องต่อไปนี้

- นักเรียนจะต้องรู้จักจุดประสงค์ในการเรียนในบทเรียนแต่ละบทนั้นว่า นักเรียนกำลังต้องการอะไร นักเรียนจะสามารถปฏิบัติหรือเปลี่ยนแปลงพฤติกรรมอย่างไร

- นักเรียนจะต้องรู้จักวิเคราะห์ข้อความ ในลักษณะที่เป็นแบบเดียวกันหรือเปรียบเทียบกัน เพื่อนำสู่การค้นพบ
- นักเรียนจะต้องรู้จักสัมพันธ์ความคิด ครูจะต้องพยายามสอนให้นักเรียนรู้จักสัมพันธ์ความคิด เมื่อสอนเรื่องหนึ่งก็ควรจะพูดถึงเรื่องที่เกี่ยวข้องกัน เช่น จะสอนเรื่องทศนิยม ก็จะต้องทบทวนถึงเรื่องร้อยละ ครูจะต้องทบทวนให้ครบทุกเรื่องที่เกี่ยวข้องและจะต้องดูให้เหมาะสมกับเวลา
- นักเรียนจะต้องเรียนด้วยความเข้าใจ และสามารถนำไปใช้ได้ นักเรียนบางคนว่าสูตรได้แม่น แต่แก้โจทย์ปัญหาไม่ได้ เรื่องนี้ครูควรจะแก้ไข โดยอาจจะต้องยกตัวอย่างมากๆ จนทำให้นักเรียนเข้าใจและเกิดการเรียนรู้
- ครูจะต้องเป็นผู้มีสมองไว มีปฏิภาณ รู้จักวิธีการที่จะนำนักเรียนไปสู่ข้อสรุปในการสอน แต่เรื่องนั้นควรจะได้อบรมทบทวน
- นักเรียนควรจะเรียนรู้วิธีการว่าจะเรียนอย่างไร โดยเฉพาะการเรียนคณิตศาสตร์จะต้องจำเหมือนนกแก้วนกขุนทองไม่ได้
- ครูไม่ควรทำโทษนักเรียน จะทำให้นักเรียนเบื่อหน่ายยิ่งขึ้น ควรจะเสริมกำลังใจให้นักเรียน

3. จิตวิทยาในการฝึก (Psychology of drill)

การฝึกเป็นสิ่งที่จำเป็นสำหรับนักเรียน การให้นักเรียนฝึกซ้ำๆ บางครั้งก็ทำให้นักเรียนเกิดการเบื่อหน่าย ครูบางคนคิดว่าการฝึกโดยให้ทำโจทย์มากๆ และโจทย์ที่ซ้ำๆ กันหลายๆ ครั้ง นักเรียนก็อาจเบื่อหน่าย ครูจะต้องดูให้เหมาะสมการฝึกที่มีผลอาจจะพิจารณาได้ดังนี้

- 3.1 การฝึกจะให้ได้ผลดีต้องฝึกเป็นรายบุคคล เพราะคำนึงถึงความแตกต่างระหว่างบุคคลได้
- 3.2 ควรจะฝึกไปที่ละเรื่อง เมื่อจบบทเรียนหนึ่ง และเมื่อเรียนได้หลายบทก็ควรจะฝึกรวมยอดอีกครั้งหนึ่ง
- 3.3 ควรจะมีการตรวจสอบแบบฝึกหัดแต่ละครั้งทำให้นักเรียนทำเพื่อเป็นการประเมินผลนักเรียนตลอดจนประเมินผลการสอนของครูด้วย เมื่อนักเรียนทำโจทย์ปัญหาไม่ได้ ครูควรได้ถามตนเองอยู่เสมอว่าเพราะอะไรจะเป็น เพราะครูใช้วิธีการสอนไม่ดีก็ได้ อย่างไม่โทษนักเรียนฝ่ายเดียวจะต้องพิจารณาให้รอบคอบ
- 3.4 เลือกแบบฝึกหัดให้สอดคล้องกับบทเรียน และให้แบบฝึกหัดพอเหมาะไม่มากเกินไป
- 3.5 แบบฝึกหัดที่นักเรียนทำนั้นจะต้องคำนึงถึงความแตกต่าง ระหว่างบุคคลด้วย

3.6 แบบฝึกหัดที่ให้นั้นควรจะฝึกหลายๆ ด้าน คำนึงถึงความยากง่าย เรื่องใดควรเน้นก็อาจจะให้ทำหลายๆ ข้อเพื่อให้นักเรียนเข้าใจและจำได้

3.7 พึงตระหนักอยู่เสมอว่าก่อนที่จะให้นักเรียนทำโจทย์นั้น นักเรียนเข้าใจในวิธีทำโจทย์นั้นโดยต้องแก้ตัวอย่างปล่อยให้ทำโจทย์ตามตัวอย่างที่ครูสอน โดยไม่เกิดความคิดริเริ่มสร้างสรรค์แต่ประการใด

2.4 หลักและแนวการจัดการเรียนการสอนคณิตศาสตร์

หลักการสอนคณิตศาสตร์ที่สำคัญคือ

1. สอนให้ผู้เรียนเกิดมโนทัศน์หรือได้ความรู้ทางคณิตศาสตร์จากการคิดและมีส่วนร่วมในการทำกิจกรรมกับผู้อื่น ใช้ความคิดและคำถามที่นักเรียนสงสัยเป็นประเด็นในการอภิปราย เพื่อให้ได้แนวคิดที่หลากหลาย และเพื่อนำไปสู่ข้อสรุป
2. สอนให้ผู้เรียนเห็นโครงสร้างทางคณิตศาสตร์ ความสัมพันธ์และความต่อเนื่องของเนื้อหาคณิตศาสตร์
3. สอนโดยคำนึงว่าจะให้นักเรียนเรียนอะไร (What) และเรียนอย่างไร (How) นั่นคือ ต้องคำนึงถึงทั้งเนื้อหาวิชาและกระบวนการเรียน
4. สอนโดยใช้สิ่งที่ป็นรูปธรรมอธิบายนามธรรม หรือการทำให้สิ่งที่ป็นนามธรรมมากๆ ป็นนามธรรมที่ง่ายขึ้นหรือพอที่จะจินตนาการได้มากขึ้น ทั้งนี้เนื่องจากมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์บางอย่างไม่สามารถหาสื่อมาอธิบายได้
5. จัดกิจกรรมการสอนโดยคำนึงถึงประสบการณ์และความรู้พื้นฐานของนักเรียน
6. สอนโดยใช้การฝึกหัดให้ผู้เรียนเกิดประสบการณ์ในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ทั้งการฝึกรายบุคคล การฝึกเป็นกลุ่ม การฝึกทักษะย่อยทางคณิตศาสตร์ และการฝึกทักษะรวมเพื่อแก้ปัญหาที่ซับซ้อนมากขึ้น
7. สอนเพื่อให้ผู้เรียนเกิดทักษะการคิดวิเคราะห์เพื่อแก้ปัญหา สามารถให้เหตุผล เชื่อมโยงสื่อสาร และคิดอย่างสร้างสรรค์ ตลอดจนเกิดความอยากรู้อยากเห็นและนำไปคิดต่อ
8. สอนให้นักเรียนเห็นความสัมพันธ์ระหว่างคณิตศาสตร์ในห้องเรียนกับคณิตศาสตร์ในชีวิตประจำวัน
9. ผู้สอนควรศึกษาธรรมชาติและศักยภาพของผู้เรียน เพื่อจะได้กิจกรรมการสอนให้สอดคล้องกับผู้เรียน

10. สอนให้ผู้เรียนมีความสุขในการเรียนคณิตศาสตร์ รู้สึกว่าวิชาคณิตศาสตร์ไม่ยาก และมี ความสนุกสนานในการทำกิจกรรม

11. สังเกต และประเมินการเรียนรู้ และความเข้าใจของผู้เรียนขณะเรียนในห้อง โดยใช้ คำถามสั้นๆ หรือการพูดคุยปกติ

นอกจากนี้ ยูนิท พิพิธกุล (2545) ยังได้กล่าวถึงหลักการสอนคณิตศาสตร์ไว้ว่า

1. ควรสอนจากเรื่องง่ายไปสู่เรื่องยาก
2. เปลี่ยนจากรูปธรรมไปสู่นามธรรม ในเรื่องที่สามารถใช้สื่อการเรียนการสอนรูปธรรม ประกอบ
3. สอนให้สัมพันธ์ความคิด เมื่อครูจะทบทวนเรื่องใดก็ควรทบทวนให้หมด การรวบรวม เรื่องที่เหมือนกันเข้าเป็นหมวดหมู่จะช่วยให้แก่นักเรียนเข้าใจ และจำได้แม่นยำ
4. เปลี่ยนวิธีการสอน ไม่ซ้ำซากน่าเบื่อหน่าย ผู้สอนควรสอนให้สนุกสนานและน่าสนใจ ซึ่งอาจจะมี กลอน เพลง เกม การเล่าเรื่อง การทำภาพประกอบ การ์ตูน ปริศนา ต้องรู้จัก สอดแทรก สิ่งละอันพันละน้อย เพื่อให้บทเรียนน่าสนใจ
5. ใช้ความสนใจของนักเรียนเป็นจุดเริ่มต้น เป็นแรงจูงใจที่จะเรียน ด้วยเหตุนี้ในการสอน จึงมีการนำเข้าสู่บทเรียนเร้าใจเสียก่อน
6. ควรจะคำนึงประสบการณ์เดิม และทักษะเดิมที่นักเรียนมีอยู่ กิจกรรมใหม่ควรจะต่อเนื่อง กับกิจกรรมเดิม
7. เรื่องที่มีสัมพันธ์กันก็ควรสอนไปพร้อมๆ กัน
8. ให้ผู้เรียนมองเห็นโครงสร้างไม่ใช่มุ่งแต่เนื้อหา
9. ไม่ควรเป็นเรื่องยากเกินไป ผู้สอนบางคนชอบให้โจทย์ยาก ๆ เกินสาระการเรียนรู้ที่กำหนดไว้ซึ่งอาจจะทำให้ผู้เรียนที่เรียนอ่อนท้อถอย แต่ถ้าผู้เรียนเก่งก็อาจจะชอบ ควรจะส่งเสริมเป็นราย ไปในการสอนต้องคำนึงถึงหลักสูตรและเลือกเนื้อหาเพิ่มเติมให้เหมาะสมทั้งนี้เพื่อส่งเสริมศักยภาพ
10. สอนให้นักเรียนสามารถหาข้อสรุปได้ด้วยตนเอง การยกตัวอย่างหลายๆ ตัวอย่าง จน นักเรียนเห็นรูปแบบ จะช่วยให้นักเรียนสรุปได้ อย่ารีบบอกเกินไปควรเลือกวิธีการต่างๆ ที่ สอดคล้องกับเนื้อหา
11. ให้ผู้เรียนปฏิบัติในสิ่งที่ทำได้ ลงมือปฏิบัติจริงและประเมินการปฏิบัติจริง
12. ผู้สอนควรมีอารมณ์ขัน เพื่อช่วยให้บรรยากาศในห้องเรียนน่าเรียนยิ่งขึ้น วิชา คณิตศาสตร์เป็นวิชาที่เรียนหนัก ครูจึงไม่ควรจะเคร่งเครียดให้นักเรียนเรียนด้วยความสนุกสนาน

13. ผู้สอนควรจะมีภาวะกระตือรือร้น และตื่นตัวอยู่เสมอ
14. ผู้สอนควรหมั่นหาความรู้เพิ่มเติม เพื่อจะนำสิ่งแปลก และใหม่มาถ่ายทอดให้ผู้เรียนและผู้สอนควรจะเป็นผู้ที่มีความรู้ในอาชีพของตนจึงจะทำให้สอนได้ดี

แนวการจัดการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ให้ประสบความสำเร็จโดยให้นักเรียนมองเห็นว่าคณิตศาสตร์เป็นสิ่งที่มีความหมาย จากการมีการจัดประสบการณ์การเรียนรู้ให้แก่เด็กเรียน 3 ประเภท คือ

1. ประสบการณ์การเรียนรู้ที่เป็นรูปธรรม (concrete learning experience) หรือ การเรียนรู้ขั้น “ลงมือกระทำ” เป็นประสบการณ์ที่นักเรียนได้กระทำกับวัตถุสิ่งของต่างๆ ควบคู่ไปกับสัญลักษณ์ ซึ่งจะช่วยให้เด็กนักเรียนเห็นว่าสัญลักษณ์นั้นมีความหมาย
2. ประสบการณ์การเรียนรู้ที่เป็นกึ่งรูปธรรม (semi concrete learning experience) หรือการเรียนรู้ขั้น “การเกิดภาพในใจ” เป็นการจัดประสบการณ์ที่ให้นักเรียนได้รับสิ่งเร้าทางสายตาควบคู่ไปกับสัญลักษณ์ ซึ่งจะช่วยให้เด็กนักเรียนเห็นว่าสัญลักษณ์นั้นมีความหมาย เด็กนักเรียนไม่ต้องกระทำกับวัตถุแต่สังเกตหรือดูภาพของวัตถุ
3. ประสบการณ์การเรียนรู้ที่เป็นนามธรรม (abstract learning experience) หรือการเรียนรู้ขั้น “คิดนามธรรม” เป็นประสบการณ์ที่นักเรียนได้รับโดยใช้สัญลักษณ์เพียงอย่างเดียวไม่ต้องมีการกระทำกับวัตถุหรือรับสิ่งเร้าทางสายตา

2.5 กระบวนการเรียนการสอนคณิตศาสตร์

ในการจัดกระบวนการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ในแต่ละเนื้อหา ต้องคำนึงถึงขั้นตอนการเรียนรู้ของนักเรียน เพื่อให้เด็กนักเรียนสามารถเรียนรู้คณิตศาสตร์ได้อย่างมีประสิทธิภาพและมีประสิทธิผล

นอกจากนี้กรมวิชาการได้สร้างแบบการสอนคณิตศาสตร์ทั่วไปขึ้น โดยมีจุดมุ่งหมายเพื่อให้ครูผู้สอนสามารถนำไปใช้ในการสอนได้ในทุกสภาพการณ์ และให้การสอนนั้นเป็นการสอนที่มีประสิทธิภาพ ซึ่งรูปแบบการสอนคณิตศาสตร์ทั่วไปมีขั้นตอนในการสอน ดังนี้

1. ทบทวนความรู้เดิม เพื่อให้มีความรู้พื้นฐานที่เพียงพอ
2. การสอนเนื้อหาใหม่ ควรสอนให้เข้าใจเนื้อหา รู้ความหมาย รู้ค่า เพื่อให้เด็กนักเรียนสามารถจำได้ โดยวิธีการบอกให้รู้หรือค้นพบด้วยตนเอง

วิธีการสอนประกอบด้วย

- ใช้สื่อ ๑ อุปกรณ์อธิบายเนื้อหาให้นักเรียนเกิดความคิดรวบยอด
- ตรวจสอบความเข้าใจของนักเรียน
- 3. สรุปเป็นวิธีลัด หรือความคิดรวบยอด
- 4. ฝึกทักษะ ทำแบบฝึกหัด
- 5. นำความรู้ไปใช้
- 6. ประเมินผล ตรวจสอบผลการเรียนรู้และการนำไปใช้

ในส่วนของกระบวนการแก้ปัญหาซึ่งกล่าวได้ว่า เป็นกระบวนการสำคัญที่เป็นเป้าหมายในการเรียนวิชาคณิตศาสตร์นั้น มีผู้เสนอขั้นตอนของกระบวนการไว้มากมาย เช่น

โพลยา ได้เสนอขั้นตอนตามกระบวนการแก้ปัญหาไว้ 4 ขั้นตอน คือ

1. ขั้นทำความเข้าใจปัญหา
2. ขั้นวางแผน
3. ขั้นดำเนินการตามแผน
4. ขั้นตรวจสอบกระบวนการและคำตอบ

2.6 ปัญหาในการเรียนการสอนคณิตศาสตร์

ปัจจัยที่ทำให้เด็กไทยมีผลสัมฤทธิ์ทางคณิตศาสตร์ไม่เทียบเท่ากับชาติอื่น ๆ ซึ่งพอสรุปได้ดังนี้

1. กระบวนการเรียนการสอนไม่เอื้อต่อการทำให้เด็ก ๆ ชอบเรียนวิชาคณิตศาสตร์ อาทิ การเริ่มต้นยาก แบบฝึกหัดยาก มีการค้นคว้าทดลองน้อย ทำแบบฝึกหัดไม่เหมาะสม ครู อาจารย์อธิบายด้วยภาษาที่ค่อนข้างยาก ตรวจสอบบ้านไม่ทัน ทำให้เด็ก ๆ ไม่ทราบบางสิ่งที่ยังขาดหรือยังไม่เข้าใจ และก็จะเป็นอย่างนั้นจนไม่ชอบวิชานี้

2. สื่อการเรียนการสอนมีน้อย สูตรหรือข้อเท็จจริงบางอย่างหากใช้สื่อช่วยจะทำให้เด็กเข้าใจง่าย อาจารย์บางท่านใช้สื่อดี เหมาะสม ใช้โจทย์ช่วยกระตุ้นให้คิด โดยโจทย์นั้นใกล้เคียงและสืบเนื่องกับเรื่องชีวิตประจำวัน แต่อาจารย์ส่วนหนึ่งจะไม่ค่อยเห็นความจำเป็นของการใช้สื่อ หรือแม้เห็นความจำเป็นแต่ก็ไม่มีเวลาทำขึ้นหรือจัดหาสื่อดังกล่าว

3. การประเมินผลส่วนหนึ่งใช้การสอบข้อสอบปรนัยเป็นหลัก สิ่งที่ได้รู้ไม่สามารถจะนำมาเขียนตอบได้ เพราะข้อสอบเชิงปรนัยจะเป็นกรอบทั้งคำถามและคำตอบ อาจจะมีบ้างที่อาจารย์บางท่านออกข้อสอบปรนัยได้ดี สามารถดึงสิ่งที่เด็กมีความสามารถวิเคราะห์แล้วตอบได้ แต่ส่วน

ใหญ่ใช้การสอนปรนัยเป็นหลัก เหตุผลประการหนึ่ง คือ ตรวจสอบง่าย ประมวลคะแนนง่าย ปัจจุบันนี้นักประเมินผลหลายท่านได้แสดงความคิดเห็นด้านการประเมินผลว่าการให้คะแนนทุกด้าน อาทิ การอธิบายด้วยวาจาของเด็ก การแสดงวิธีทำ การทำรายงาน การค้นคว้า การทดลอง การทำสื่อโครงการต่างๆ รวมทั้งพฤติกรรมการทำงานกลุ่ม ซึ่งสิ่งนี้ข้อสอบปรนัยจะวัดได้ยากมาก แต่หากนำมาแปรผลเป็นคะแนนความสัมฤทธิ์ในภาพรวม จะให้ความสมบูรณ์และเป็นการประเมินตามสภาพจริงได้ดีกว่ามาก

4. การขาดการบูรณาการ ปกติในชีวิตประจำวันเราจะพบเรื่องต่างๆ มาก ความสามารถในการบูรณาการ คือ ประสมประสาน เชื่อมโยงวิชาความรู้ ประสบการณ์ต่างๆ เข้าด้วยกัน ครูอาจารย์หลายโรงเรียนสามารถสอนวิชาคณิตศาสตร์ โดยสอดแทรกสาระด้านสังคมศึกษา วิทยาศาสตร์ ศิลปะศึกษา เข้าไปได้อย่างกลมกลืน เด็กจะเรียนรู้หลายอย่าง que เชื่อมโยงกันอยู่แล้วไปพร้อมๆ กัน และครู อาจารย์หลายคนสามารถบูรณาการคณิตศาสตร์เข้ากับชีวิตประจำวันได้อย่างแนบเนียนมาก ทำให้เด็กๆ ไม่รู้สึกลัวเลขเรียนยาก และทำให้เด็กอีกจำนวนหนึ่งชอบเลขคณิต ซึ่งเป็นรากฐานสำคัญนำไปสู่การชอบวิชาทางด้านวิทยาศาสตร์อีกด้วย

5. ครู อาจารย์ที่เรียนคณิตศาสตร์สายตรง รวมทั้งที่มีประสบการณ์การสอนคณิตศาสตร์มีจำนวนไม่เพียงพอ กับภารกิจการเรียนการสอนวิชานี้ สาเหตุอาจจะเนื่องมาจากเรียนจบมาน้อย หรือไม่ทำงานอื่นหรือลาออก หรือเกษียณอายุแล้ว จำนวนที่ลดไปกับจำนวนที่ได้รับการบรรจุไม่เพียงพอชดเชยกัน จึงทำให้ผลในภาพรวมเป็นความขาดแคลน ซึ่งส่งผลกระทบต่อพัฒนาคุณภาพการเรียนการสอนอย่างมากด้วย

บทที่ 3

ทำไมเด็กไทยอ่อนคณิตศาสตร์

ผลการวิจัยโครงการศึกษาแนวโน้มการจัดการศึกษาคณิตศาสตร์และวิทยาศาสตร์ ร่วมกับนานาชาติ ปี 2550 (Trends in International Mathematics and Science Study 2007) หรือ TIMSS-2007 ซึ่งเป็นโครงการประเมินนักเรียนระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 วิชาวิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์ ระหว่างปี 2547-2551 โดยมี 59 ประเทศ ได้แก่ สหรัฐอเมริกา อังกฤษ ฝรั่งเศส รัสเซีย อิตาลี นอร์เวย์ สาธารณรัฐประชาชนจีน ญี่ปุ่น สิงคโปร์ เกาหลีใต้ ไทย ฯลฯ ผลการวิจัยพบว่า

ในภาพรวมวิชาคณิตศาสตร์ ประเทศที่ได้คะแนนสูงสุด 5 ประเทศ ได้แก่ จีน-ไทเป เกาหลีใต้ สิงคโปร์ฮ่องกง และญี่ปุ่นโดยประเทศไทยอยู่อันดับที่ 29 ได้ 441 คะแนน ซึ่งต่ำกว่าค่าเฉลี่ยนานาชาติที่กำหนดไว้ 500 คะแนน

ส่วนวิชาวิทยาศาสตร์ คะแนนสูงสุด 5 ประเทศ คือ สิงคโปร์จีน-ไทเป ญี่ปุ่น เกาหลีใต้ และอังกฤษ ส่วนไทยอยู่ในอันดับที่ 21 ได้ 471 คะแนนซึ่งต่ำกว่าค่าเฉลี่ยนานาชาติที่ 500 คะแนนเช่นกัน

เมื่อเปรียบเทียบกับผลประเมินปี 2542 พบว่าประเทศไทยลดลงทั้ง 2 วิชา คือ คณิตศาสตร์ จาก 467 คะแนน เหลือ 441 คะแนน และวิทยาศาสตร์ จาก 482 คะแนน เหลือ 471 คะแนน

3.1 อะไรคือปัญหา

ปัญหาที่หมักหมมอยู่ในระบบการเรียนการสอนในสังคมไทยมานานมาก สืบเนื่องจากครูไทยใช้ระบบข้อสอบปรนัยวัดผลเด็ก

นอกจากการวัดผลแล้ว การฝึกเด็กก็ยังใช้ข้อสอบปรนัย ซึ่งเป็นข้อสอบที่ไม่ได้พัฒนาระบบคิด การใช้เหตุผลข้อสอบปรนัยเป็นข้อสอบที่ทำลายเด็กไทยอย่างมาก คนที่มาเรียนครูก็ถูกมอมเมาด้วยข้อสอบปรนัย เมื่อมาเป็นครูก็ใช้ข้อสอบปรนัย เด็กบางคนทำข้อสอบโดยไม่ต้องอ่านคำถามใช้วิธีสุ่มเดาก็สามารถสอบผ่านได้

ศ.ดร.ณรงค์ กล่าวว่า สังคมการศึกษาไทยบริโภคข้อสอบปรนัยมาตั้งแต่ปี 2516 ถึงตอนนี้เป็นเวลาถึง 35 ปีแล้ว ครูทุกวันนี้ก็มุ่งสอนเพื่อหวังให้เด็กไปสอบเรียนต่อให้ได้ มีการสอนวิธีลัด สอนเทคนิค แต่เราไม่ได้สอนเพื่อให้เด็กเกิดความรู้ การสอนเพื่อให้เด็กสอบเข้าเรียนได้กับการสอนให้เด็กมีความรู้จึงไม่เหมือนกัน เด็กทุกวันนี้จึงชอบไปกวัดวิชาเพราะชอบเรียนลัด ชอบ

ไปเรียนเทคนิคการทำข้อสอบ เมื่อสอบเข้าเรียนในระดับมหาวิทยาลัยบางคนยังต้องไปกวัดวิชา เราจะเห็นเด็กมหาวิทยาลัยหลายแห่งยังต้องไปกวัดวิชา เพราะเมื่อมาเรียนในระดับมหาวิทยาลัยเขา ปรับตัวเองไม่ได้ มาเจอข้อสอบอัตนัยหรือข้อสอบที่ให้คิดวิเคราะห์แล้วเขียนออกมา เด็กจึงมีปัญหา จะเห็นว่าผลพวงที่ใช้ข้อสอบปรนัยกับเด็กนั้นทำลายเด็กเป็นอย่างมาก **ประเทศที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนในวิชาคณิตศาสตร์และวิทยาศาสตร์สูง** ไม่ว่าจะเป็นสิงคโปร์ มาเลเซีย ญี่ปุ่น เกาหลีใต้ ไต้หวัน ฮังการี และมาเลเซีย จะไม่ใช้ข้อสอบปรนัยกับเด็ก

สมวงษ์ แปลงประสพโชค เศษ บุญประจักษ์ และจรรยา ภูอุดม(2550)ได้สำรวจความเห็นของครูผู้สอนคณิตศาสตร์ 474 คน และนักเรียน 971 คน จากโรงเรียนนำร่องการใช้หลักสูตรพุทธศักราช 2542 จำนวน 169 โรงเรียน มีความเห็นว่าสาเหตุที่นักเรียนไทยอ่อนคณิตศาสตร์เนื่องมาจากองค์ประกอบดังนี้

1. เกี่ยวกับนักเรียน ครูมีความเห็นในระดับมากกว่าสาเหตุที่นักเรียนไทยอ่อนคณิตศาสตร์เกิดจากนักเรียนไม่ชอบคิด ไม่ชอบแก้ปัญหา ขาดการฝึกฝนและทบทวนด้วยตนเองอย่างสม่ำเสมอแต่นักเรียนมีความเห็นในสาเหตุดังกล่าวอยู่ในระดับปานกลาง
2. เกี่ยวกับผู้ปกครอง ครูมีความเห็นในระดับมากกว่าผู้ปกครองมีการศึกษาน้อยและผู้ปกครองไม่สนับสนุนหรือเอาใจใส่การเรียนของนักเรียน เป็นสาเหตุที่ทำให้นักเรียนไทยอ่อนคณิตศาสตร์ แต่นักเรียนมีความคิดเห็นในข้อการศึกษาของผู้ปกครองอยู่ในระดับปานกลาง และเห็นว่าการที่ผู้ปกครองไม่สนับสนุนหรือเอาใจใส่การเรียนของนักเรียนเป็นสาเหตุในระดับน้อย
3. เกี่ยวกับหลักสูตร ครูมีความเห็นในระดับมาก ว่าสาเหตุที่นักเรียนไทยอ่อนคณิตศาสตร์อันเนื่องมาจาก สื่อการสอนและเครื่องอำนวยความสะดวกไม่เพียงพอ แต่นักเรียนระดับมัธยมศึกษามีความเห็นในสาเหตุดังกล่าวระดับปานกลางและนักเรียนระดับประถมศึกษามีความเห็นในสาเหตุดังกล่าวในระดับน้อย
4. เกี่ยวกับครูผู้สอน นักเรียนระดับมัธยมศึกษามีความเห็นในระดับมากกว่า สาเหตุที่นักเรียนไทยอ่อนคณิตศาสตร์เนื่องมาจากครูได้แก่ ครูสอนไม่ดี อธิบายไม่รู้เรื่อง ครูดูเจ้าอารมณ์ ครูไม่เข้มงวดในการทำการบ้าน ครูสอนจริงจังบรรยายภาคเดียวขาดอารมณ์ขัน ครูไม่อดทนที่จะอธิบายให้นักเรียนเข้าใจ ครูไม่ใช้สื่อการสอนเพื่อช่วยให้นักเรียนเข้าใจ ครูให้นักเรียนอ่านเองสรุปเองแล้วมาสอบ วิธีสอนของครูไม่น่าสนใจ ครูมีความรู้ไม่ดี ขาดความมั่นใจตนเอง ครูไม่จบสาขาวิชาคณิตศาสตร์โดยตรง ครูไม่เปิดใจกว้างให้นักเรียนตอบอย่างอิสระ ครูขาดแรงจูงใจ ครูสอนโดยไม่เน้นการคิดแก้ปัญหาและไม่เน้นการนำไปใช้ในชีวิตจริง ครูมีภาระงานที่รับผิดชอบในโรงเรียนมากเกินไป แต่ครูมีความเห็นในระดับมากตรงกับนักเรียนเพียง 4 ประเด็นได้แก่ ครูให้นักเรียนอ่านเองสรุปเองแล้วมาสอบ

ครูมีความรู้ไม่ดี ขาดความมั่นใจในตนเอง ครูไม่จบสาขาวิชาคณิตศาสตร์โดยตรง และครูไม่เปิดใจกว้างให้นักเรียนตอบอย่างอิสระ แต่นักเรียนในระดับประถมศึกษาที่มีความเห็นทุกข้อที่กล่าวมาในระดับปานกลาง

สมวงษ์ แปลงประสพโชค ดำเนินการจัดสัมมนา ครู อาจารย์ หัวหน้าหมวดคณิตศาสตร์ นักการศึกษาและผู้เชี่ยวชาญจากสถาบันการศึกษาที่เกี่ยวข้องกับการเรียนการสอนคณิตศาสตร์จำนวน 118 คน (สิงหาคม 2549) และสัมภาษณ์ ความเห็นของคณาจารย์ใน 6 มหาวิทยาลัย ได้ข้อสรุปปัญหาและแนวทางแก้ปัญหการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ดังนี้

1. ปัญหาสื่อการสอน สื่อการสอนบางชนิดเป็นสื่อที่มีขนาดเล็กทำให้นักเรียนไม่มีส่วนร่วม บางครั้งผู้บริหารเป็นผู้กำหนดการซื้อสื่อ ทำให้ได้สื่อที่ไม่ตรงความต้องการของครูและไม่น่าสนใจ ครูไม่สามารถเลือกซื้อสื่อที่เหมาะสมตามที่ตนต้องการใช้ ขั้นตอนในการซื้อสื่อยุ่งยาก อีกทั้งขาดงบประมาณในการซื้อสื่อ ครูไม่สามารถสร้างสื่อให้ตรงกับเนื้อหา ขาดความรู้ในการผลิตสื่อ ไม่มีเวลาผลิตสื่อ สื่อมีน้อยไม่หลากหลายไม่ได้มาตรฐาน มีแค่เอกสาร ขาดเครื่องมือประกอบการใช้ สื่อสำเร็จรูปที่เป็นเทคโนโลยี

แนวทางแก้ไข เนื้อหาบางเรื่องสามารถใช้สื่อของจริงสอน อาจให้ปฏิบัติกิจกรรมกลุ่มระดมสมอง ให้นักเรียนสร้างสื่อเอง ใช้การตั้งคำถาม ใช้สื่อรอบตัวในห้อง จัดสถานการณ์บทบาทสมมติ ผลิตสื่อเอง หรือนำสื่อเก่ามาปรับปรุงให้ดีขึ้น ปรับปรุงวิธีการซื้อและแหล่งที่ซื้อสื่อ

2. ปัญหาเกี่ยวกับครู ครูตรวจงานนักเรียนไม่ทัน เวลาสอนน้อยเนื้อหาการสอนไม่ทัน บางชั่วโมงสอนอยู่ในภาคบ่ายทำให้นักเรียนไม่สนใจ การพัฒนาผู้สอนทำได้ไม่ทั่วถึง ครูเตรียมการสอนไม่ดีพอ บางโรงเรียนมีผู้สอนหลายคนในวิชาเดียวกันสอนไม่สอดคล้องกัน นักเรียนที่มีความแตกต่างกันมาก ทำให้สอนยาก ครูจบไม่ตรงสาขาวิชาเอก ครูไม่เข้าใจในเนื้อหา ขาดเทคนิคในการถ่ายทอด ครูไม่ชอบค้นคว้าหาความรู้ใหม่เพิ่มเติม ขาดความมั่นใจในการสอน ขาดความกระตือรือร้น ครูสอนเร็วเกินไป บางคนไม่มีจิตสำนึกในความเป็นครู ขาดแรงเสริมไม่มีกำลังใจทำงาน ขาดจรรยาบรรณ ครูไม่เอาใจใส่นักเรียนเท่าที่ควร ครูสอนแบบดิ่งเครียด ครูมีอารมณ์ไม่คงที่ ครูคณิตศาสตร์คู่ ครูใช้วิธีการวัดผลไม่ตรงกับเนื้อหาหรือกิจกรรมที่สอน ครูชอบลาหยุด ครูออกข้อสอบในสิ่งที่ไม่เกี่ยวข้องกับเรื่องที่สอน และข้อสอบยาก ขาดการนิเทศระหว่างกันและกันครูสอนหลายวิชาทำให้อต้องเตรียมการสอนมาก

แนวทางแก้ไข ครูต้องมีจิตวิทยาในการสอน ฝึกให้นักเรียนคิดเป็น ฝึกทักษะกระบวนการ และฝึกให้อดทนในการแก้ปัญหาโดยไม่รู้ตัว ชี้ให้เห็นความสำคัญของคณิตศาสตร์ ว่านำไปใช้ในชีวิตจริงได้อย่างไร ครูควรมีความอดทนในการแก้ปัญหาในการเรียนการสอน ควรมีการพัฒนาครูในหลาย ๆ ด้าน จดอบรมบ่อย ๆ ในเรื่องเนื้อหา วิธีการสอน และการผลิตสื่อใช้เอง สิ่งที่สำคัญที่สุดคือ ตัวครูต้องแม่นใน

เนื้อหาและมีวิธีการสอนที่หลากหลาย แล้วจะสามารถคิดสื่อการสอนที่เหมาะสมและจะสามารถแก้ปัญหาได้

3. ปัญหาเกี่ยวกับนักเรียน นักเรียนห่วยถ่น เกียจคร้าน ไม่ตั้งใจเรียน ไม่ชอบเรียน ไม่ชอบคิด ชอบก่อวุ่นในห้อง ชอบลอกงานมาส่ง ความคิดสับสนสมาธิสั้น มีปัญหาสภาพจิตใจและมาจากสภาพครอบครัวไม่ค่อยดี ผู้ปกครองไม่เอาใจใส่ ขาดอุปกรณ์ในการเรียน นักเรียนไม่ชอบวิชาคณิตศาสตร์ พื้นฐานการคิดคำนวณไม่ดี ภาระงานทางบ้านมาก ไม่มีสมาธิในการเรียนเนื่องจากจัดเวลาเรียนในช่วงเวลาที่ไม่เหมาะสม ไม่กระตือรือร้นเนื่องมาจากการเปิดโอกาสให้สอบซ่อมในวิชาที่สอบตกได้หลายครั้งหรือตลอดเวลา นักเรียนขาดคุณธรรม

แนวทางแก้ไข ครูควรสร้างความเข้าใจ จัดกิจกรรมหลากหลายให้น่าสนใจ ให้กำลังใจ สร้างแรงจูงใจ แบ่งกลุ่มเพื่อนช่วยเพื่อนบ้าง สร้างเจตคติที่ดีให้แก่ นักเรียน โดยการนำเข้าสู่บทเรียนด้วยสิ่งที่น่าสนใจให้นักเรียนเห็นประโยชน์ของคณิตศาสตร์ ใช้วิธีการสอนหรือกระบวนการสอนที่เป็นขั้นตอนชัดเจน ให้ความรักความเข้าใจแก่นักเรียนเสมอกันทุกคน

4. ปัญหาความถนัด และสติปัญญาของนักเรียนต่างกัน บางคนสมาธิสั้น ถ้าครูใช้วิธีสอนแบบเดียวจะไม่ประสบความสำเร็จ หลักสูตรอาจไม่สอดคล้องในทางปฏิบัติ ครูบางคนอาจได้รับการงานที่นอกเหนือจากการสอนมากไปไม่มีเวลาเอาใจใส่นักเรียนอย่างทั่วถึงอีกสาเหตุหนึ่งที่ทำให้ไม่ประสบความสำเร็จในการสอนคณิตศาสตร์คือนักเรียนไม่ชอบวิชาคณิตศาสตร์

แนวทางแก้ไข ครูควรทำวิจัยแก้ปัญหาที่พบในชั้นเรียนตั้งแต่ระดับชั้นอนุบาลเพื่อแก้ปัญหาดังแต่เริ่มต้นก่อนที่จะสะสมมากขึ้น

5. ปัญหาเด็กนักเรียนมีพื้นฐานคณิตศาสตร์บกพร่อง สาเหตุจากครูผู้สอนไม่แม่นยำในเนื้อหา จบไม่ตรงสาขาวิชาเอก เทคนิคการสอนไม่ดี หรือแม้กระทั่งคนที่จบตรงสาขาเองบางคนก็มีความรู้ดีแต่เทคนิคการสอนไม่ดี ทำให้นักเรียนที่ได้รับความรู้ไปอย่างบกพร่อง ทำให้ขาดความรู้ หรือรู้ผิดๆ สะสมมาเรื่อยๆ จนทำให้ผลสัมฤทธิ์ต่ำ สื่อการสอนที่ใช้ยังไม่ชัดเจนพอทำให้ครูใช้สื่อบางอย่างแบบไม่รู้จริง

แนวทางการแก้ไข ฝึกให้ครูมีความรู้ความเชี่ยวชาญในการสอน โดยจัดอบรมครูให้ทั่วถึงและสม่ำเสมอ ทำชุดการเรียนการสอนเพิ่มเติม อาจจะเป็นในลักษณะบทเรียนสำหรับเรียนรู้ด้วยตนเองหรือบทเรียนเสริมสำหรับเนื้อหาที่นักเรียนยังไม่เข้าใจหรือทำทุกเนื้อหาเตรียมไว้เพราะนักเรียนมีความแตกต่างกัน ซึ่งเป็นการฝึกอยู่เสมอ และชุดการสอนควรมีทั้งความยากง่ายหลายระดับ ครูควรมีความรู้มีเทคนิคการถ่ายทอดดี สามารถทำให้นักเรียนสนใจและรักในวิชา ครูควรทำให้นักเรียนมี

ความเชื่อมั่นและรักในตัวครูแล้วนักเรียนจะรักในวิชาที่เรียน ครูควรวิเคราะห์และใช้สื่อการสอนให้เหมาะสมกับเนื้อหาและสอดคล้องกับกลุ่มนักเรียนที่มีความแตกต่างกัน

6. ปัญหานักเรียนไม่สามารถประยุกต์ความรู้ไปใช้กับชีวิตจริงได้ เกิดจากการเรียนแต่ทฤษฎีอย่างเดียว ไม่นำประสบการณ์ในชีวิตจริงมาใช้ ไม่นำสิ่งที่เรียนมาใช้ในการได้ประโยชน์สูงสุด **แนวทางแก้ไข** ครูต้องหาวิธีการให้นักเรียนนำความรู้ไปใช้ในชีวิตจริง เช่นการให้นักเรียนทำโครงการที่เป็นเรื่องของการบูรณาการคณิตศาสตร์มาใช้กับชีวิตจริง ในการจัดการเรียนการสอนควรมีโจทย์ปัญหาที่เกี่ยวข้องกับชีวิตจริงให้ทำบ้าง หรืออาจจะบูรณาการเรื่องให้นักเรียนแล้วให้ไปคิดว่าจะนำไปใช้กับชีวิตจริงได้อย่างไร ให้นักเรียนลองหาตัวอย่างสถานการณ์จำลองมาแก้ปัญหา หรือให้นักเรียนได้พบปัญหาจริง ๆ ก็ได้ แล้วคิดว่าจะนำคณิตศาสตร์ไปแก้ปัญหาได้อย่างไร

7. ปัญหานักเรียนไม่ชอบคิดและแก้ปัญหา เกิดจากนักเรียนไทยไม่ถูกปลูกฝังให้กล้าคิด กล้าแสดงความคิดเห็นทำให้อึดติด ครูสอนแบบบอกอย่างเดียว ทำให้นักเรียนฟังอย่างเดียวแล้วลอกตามโดยไม่คิด นอกจากนี้ครูมักสอนแบบถามตอบโดยให้พูดเดิมคำตอบพร้อมกันทั้งชั้นทำให้นักเรียนไม่ได้กระบวนการคิด นอกจากนี้การวัดผลโดยใช้ข้อสอบปรนัยเป็นการเอื้อให้นักเรียนเขาโดยไม่ได้อะไรคิด ทุกสาเหตุสะสมกันทำให้นักเรียนไม่ชอบคิดและแก้ปัญหา

แนวทางแก้ไข จะต้องมียุทธศาสตร์ที่หลากหลาย ให้ความสำคัญทำให้นักเรียนอยากคิด เช่นฝึกให้คิดสองคน หรือ คิดเป็นกลุ่ม เน้นให้คิดเป็นกระบวนการ แล้วจึงให้คิดเดี่ยว หาโจทย์ที่หลากหลายหรือให้นักเรียนสร้างโจทย์เอง เพื่อก่อให้เกิดกระบวนการคิดโดยใช้กิจกรรมที่เหมาะสมกับเนื้อหาที่สอน

8. ปัญหานักเรียนขาดการฝึกฝนและทบทวนด้วยตนเอง มักลอกการบ้าน เกิดจากขาดการปลูกฝัง ความรับผิดชอบ ความมีคุณธรรมและจริยธรรม

แนวทางแก้ไข ครูตรวจการบ้าน แก้ปัญหาไปทีละราย อย่าปล่อยปละละเลย ผู้ปกครองควรเอาใจใส่ดูแลอย่างทั่วถึง เช่น คิวว่าวันนี้มีการบ้านอะไร ช่วยคุณให้ทำการบ้าน ปลูกฝังให้รับผิดชอบตั้งแต่ นักเรียน มีความซื่อสัตย์ มีความขยัน ใจแรงจงใจภายในว่าอนาคตของเราขึ้นอยู่กับเราเอง ทำให้นักเรียนเกิดแรงจูงใจใฝ่สัมฤทธิ์ ครูต้องไม่นั่นคะแนนเป็นสำคัญ เพราะนักเรียนจะไม่คิด จะฟังแต่นักเรียนเก่ง ให้นักเรียนลองคิดเองแล้วให้คะแนนใกล้เคียงกัน ฝึกทักษะการเรียนรู้ไปเรื่อย ๆ นักเรียนจะเกิดความมั่นใจสูงขึ้น

9. ปัญหานักเรียนไม่ชอบการคิดคำนวณ เกิดจากนักเรียนไม่ชอบคณิตศาสตร์ ครูผู้สอนไม่สอนให้เห็นเป็นรูปธรรม ให้ทำโจทย์ซับซ้อนทำให้นักเรียนฝังใจว่าคณิตศาสตร์ยาก น่าเบื่อ ให้ทำซ้ำซากจึงไม่อยากคิด

แนวทางแก้ไข ต้องทำให้คณิตศาสตร์เป็นเรื่องสนุกโดยอาจใช้เกม เพลง นำเทคโนโลยีมาช่วยสอน เช่น โปรแกรมคอมพิวเตอร์ช่วยสอน บทเรียนการ์ตูน ใช้เครื่องคิดเลขบ้างในบางเรื่องที่มีตัวเลขมาก แต่ต้องเน้นให้นักเรียนมีทักษะการคิดก่อน สร้างกิจกรรมที่เร้าใจ นำเหตุการณ์ในปัจจุบันมาผูกเป็น เรื่องให้คิด ครูว่านักเรียนสนใจเรื่องใดก็นำมาเชื่อมโยง มีวิธีการเร้าใจ ทำกิจกรรมให้น่าสนใจ สร้าง สิ่งแวดล้อมให้กระตุ้นความสนใจของนักเรียน จัดให้มีการแข่งขันบ้าง มีรางวัลบ้าง การเลือกใช้ กิจกรรมขึ้นอยู่กับเนื้อหาและกลุ่มเรียน

3.2 ปัญหาเกี่ยวกับนักเรียน

ตารางที่ 1 ผลการสำรวจความคิดเห็นเรื่องปัญหาการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวกับนักเรียน

เกี่ยวกับนักเรียน	ระดับความรู้สึกเห็นด้วย(คิดเป็นร้อยละ)				
	มากที่สุด	มาก	ปานกลาง	น้อย	น้อยที่สุด
1. นักเรียนไม่สนใจเรียน.....	14	48	30	7	1
2. นักเรียนขาดเรียนเข้าเรียนช้า.....	4	22	36	32	7
3. นักเรียนพื้นฐานไม่ดี.....	30	56	11	3	-
4. นักเรียนไม่ชอบการคิดคำนวณ	22	56	19	3	-
5. นักเรียนสติปัญญาไม่ดี	1	24	53	20	3
6. นักเรียนไม่สามารถประยุกต์ความรู้ไปใช้ ในการแก้ปัญหาได้	30	54	13	3	1
7. นักเรียนสับสนจำสูตรไม่ได้	11	61	25	3	-
8. นักเรียนไม่ชอบคิด	26	57	15	3	-
9. นักเรียนไม่ชอบทำแบบฝึกหัดด้วยตนเอง	25	58	14	3	-

ตารางที่ 2 ผลการสำรวจความคิดเห็นเรื่องปัญหาการเรียนการสอนคณิตศาสตร์เกี่ยวกับหลักสูตรคณิตศาสตร์

	ระดับความรู้สึก				
	มากที่สุด	มาก	ปานกลาง	น้อย	น้อยที่สุด
1. เนื้อหาวิชาที่เรียนมากเกินไป.....	23	48	25	4	-
2. เนื้อหาวิชาน่าเบื่อ.....	14	26	50	11	-
3. สูตรมากสับสนจำยาก.....	13	36	43	8	-
4. สื่อการสอนไม่เพียงพอ.....	3	46	17	7	-
5. ลักษณะวิชาต้องคิดซับซ้อน.....	15	53	25	7	-

ตารางที่ 3 ผลการสำรวจความคิดเห็นเรื่องปัญหาการเรียนการสอนคณิตศาสตร์เกี่ยวกับครูผู้สอนคณิตศาสตร์

	ระดับความรู้สึก				
	มากที่สุด	มาก	ปานกลาง	น้อย	น้อยที่สุด
1. ครูสอนไม่ค่อยอธิบายไม่รู้เรื่อง.....	2	20	52	26	-
2. ครูจู้จี้ เจ้าอารมณ์	1	17	33	39	9
ครูไม่เข้มงวดในการทำการบ้าน.....	5	26	40	25	5
3. ครูสอนจริงจังบรรยายกาสเครียด.....	7	33	42	17	1
4. ครูไม่อดทนที่จะอธิบายให้เด็กเข้าใจ.....	6	24	32	32	5
5. ครูไม่ใช้สื่อการสอนเพื่อช่วยให้เข้าใจ.....	13	39	33	14	1
6. ครูให้นักเรียนอ่านเอง สรุปเองแล้วมาสอบ	4	13	21	34	27
7. วิธีการสอนของครูไม่น่าสนใจ	11	26	45	17	1
8. ครูสอนซ้ำไม่ตรงวิชา	4	10	21	50	18
9. ครูมีความรู้ไม่ดี	2	12	24	41	21

ปัญหาอื่นๆ

1. ขาดการสนับสนุนด้านงบประมาณในการจัดทำ
2. เศรษฐกิจของครอบครัว
3. จำนวนครูคณิตศาสตร์ไม่เพียงพอโดยเฉพาะโรงเรียนระดับอำเภอและตำบล
4. ภาระงานของครูมากไม่มีเวลาเตรียมการสอน เตรียมกิจกรรม
5. ผู้บริหารให้ความสำคัญคณิตศาสตร์น้อย
6. ครูสอนคณิตศาสตร์ไม่ได้จบเอกคณิตศาสตร์
7. ครูให้ความสำคัญในการสอนคณิตศาสตร์ระดับ ม. ปลาย มากกว่า ม. ต้น
8. นักเรียนที่เรียนอ่อนไม่สนใจและไม่ฝึกฝนความรู้มีเพียงห้องเก่งกับปานกลางเท่านั้นที่สนใจ
9. นักเรียนคิดว่าวิชาคณิตศาสตร์ยาก

3.3 ปัญหาเกี่ยวกับครู

คณิตศาสตร์เป็นวิชาที่มีความสำคัญยิ่งวิชาหนึ่ง ซึ่งถือว่าเป็นวิชาที่สร้างเสริมมนุษย์เกี่ยวกับความคิด ให้อำนาจคิดอย่างเป็นระบบ และมีเหตุผล คณิตศาสตร์ยังเป็นปัจจัยที่สำคัญในการพัฒนามนุษย์

การที่จะทำให้นักเรียนมีคุณลักษณะตามวัตถุประสงค์ของหลักสูตรต้องอาศัยปัจจัยหลายประการ ที่สำคัญ คือ การจัดกระบวนการเรียนการสอนของครู ครูผู้สอนคณิตศาสตร์จำเป็นต้องมีความเข้าใจวัตถุประสงค์ของหลักสูตร เข้าใจสภาพปัญหาต่าง ๆ ที่แตกต่างกัน ตลอดจนสามารถวิเคราะห์และแก้ปัญหาที่เกิดขึ้นในการเรียนการสอนได้ ซึ่งกระทรวงศึกษาธิการได้เสนอแนวทางการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนไว้ในแนวทางการใช้หลักสูตรว่า ให้ยึดเด็กเป็นศูนย์กลางกระบวนการเรียนรู้ กระบวนการคิด กระบวนการแก้ปัญหา กระบวนการพัฒนาค่านิยม กระบวนการฝึกทักษะและกระบวนการกลุ่มเป็นสำคัญ

แต่ในสภาพความเป็นจริง การจัดการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ที่ผ่านมาไม่สามารถดำเนินการให้สอดคล้องกับวัตถุประสงค์และแนวทางของหลักสูตรได้ เนื่องจากครูส่วนใหญ่ใช้วิธีการสอนแบบบรรยายอย่างเดียว ไม่ได้ส่งเสริมหรือกระตุ้นให้นักเรียนเกิดความคิด ครูไม่เห็นความจำเป็นของแผนการสอน ครูสอนเร็วเกินไปโดยไม่คำนึงถึงความแตกต่างระหว่างบุคคล ครูไม่มีเวลา

เตรียมการสอน การสอนมักมุ่งที่ผลลัพธ์มากกว่ากระบวนการ จากการจัดกิจกรรมการเรียนการสอน คณิตศาสตร์ของครูดังกล่าวข้างต้น ส่งผลต่อตัวผู้เรียนหลายประการ เช่น ทำให้ผู้เรียนส่วนใหญ่ไม่เข้าใจกระบวนการและขาดความเข้าใจอย่างต่อเนื่องในบทเรียน ขาดทักษะในการคิดคำนวณ ผู้เรียน คิดแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ไม่เป็น ฯลฯ ซึ่งส่งผลให้คุณภาพการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ในระดับ ประถมศึกษาไม่มีประสิทธิภาพตามที่หลักสูตรต้องการ

3.4 ทฤษฎีการสอนคณิตศาสตร์

การศึกษาแนวโน้มได้จำแนกทฤษฎีการสอนคณิตศาสตร์ออกเป็น 3 ทฤษฎี คือ

1. ทฤษฎีแห่งการฝึกฝน (Drill Theory)

ทฤษฎีนี้เชื่อว่าเด็กจะเรียนรู้คณิตศาสตร์ได้ โดยการฝึกทำสิ่งนั้นซ้ำๆ หลายๆ ครั้ง การสอนเริ่มโดยครู บอกสูตรหรือกฎเกณฑ์ให้ แล้ว让孩子ทำแบบฝึกหัดหลายๆ จนกระทั่งเด็กมีความชำนาญ

2. ทฤษฎีแห่งการเรียนรู้โดยบังเอิญ (Incidental learning Theory)

ทฤษฎีนี้เชื่อว่าเด็กจะเรียนรู้คณิตศาสตร์ได้ดี เมื่อเด็กเกิดความรู้สึกพร้อมหรืออยากเรียนรู้ในสิ่งนั้นๆ การสอนจะพยายามให้นักเรียนเรียนคณิตศาสตร์ในบรรยากาศที่ไม่เคร่งเครียด และน่าเบื่อหน่าย สอนโดยมีกิจกรรมหลากหลายและยึดนักเรียนเป็นสำคัญ

3. ทฤษฎีแห่งความหมาย (Meaning Theory)

ทฤษฎีนี้เชื่อว่าเด็กจะเรียนรู้และเข้าใจในสิ่งที่เรียนได้ดีเมื่อเด็กได้เรียนในสิ่งที่มีความหมายต่อตัวเอง เรียน ให้มีความหมายโครงสร้าง Concept และให้นักเรียนเห็น โครงสร้างของคณิตศาสตร์ในการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ จำเป็นอย่างยิ่งที่ต้องใช้ทั้ง 3 ทฤษฎีผสมกัน โดยขึ้นกับดุลยพินิจของครูผู้สอน ว่าในแต่ละเนื้อหาวิชา ลักษณะของเด็ก สภาพแวดล้อมขณะนั้น ตลอดจนตัวผู้สอนเอง ควรจะยึดหลักทฤษฎีไหนบ้าง มากน้อยเพียงไร

บทที่ 4

ปัญหาทางคณิตศาสตร์

โดยทั่วไปปัญหาหมายถึง สถานการณ์ที่เผชิญอยู่และต้องการค้นหาคำตอบ โดยที่ยังไม่รู้วิธีการหรือขั้นตอนที่จะได้รับคำตอบของสถานการณ์นั้นในทันที ถ้าสถานการณ์นั้นง่ายเกินไปจนรู้วิธีการหาคำตอบหรือรู้คำตอบทันที และสถานการณ์นั้นก็ไม่ใช่ปัญหาอีกต่อไป อย่างไรก็ตาม ปัญหาสำหรับคนหนึ่งอาจไม่ใช่ปัญหาสำหรับอีกคนหนึ่งก็ได้

ปัญหาทางคณิตศาสตร์ หมายถึง สถานการณ์ที่เกี่ยวกับคณิตศาสตร์ซึ่งเผชิญอยู่ และต้องการหาคำตอบ โดยที่ยังไม่รู้วิธีการหรือขั้นตอนที่จะได้คำตอบของสถานการณ์นั้นในทันที

การแก้ปัญหามทางคณิตศาสตร์ หมายถึง กระบวนการในการประยุกต์ความรู้ทางคณิตศาสตร์ ขั้นตอน/กระบวนการแก้ปัญหา ยุทธวิธีแก้ปัญหา และประสบการณ์ที่มีอยู่ไปใช้ในการค้นหาคำตอบของปัญหาทางคณิตศาสตร์

4.1 ยุทธวิธีการแก้ปัญหามทางคณิตศาสตร์

ในการแก้ปัญหามหนึ่งๆนอกจากนักเรียนจะต้องมีความรู้พื้นฐานที่เพียงพอและมีความเข้าใจกระบวนการแก้ปัญหาคือแล้ว การเลือกใช้ยุทธวิธีแก้ปัญหามที่เหมาะสมและมีประสิทธิภาพสูงสุดก็เป็นอีกปัจจัยหนึ่งที่ ช่วยในการแก้ปัญหาม ถ้านักเรียนมีความคุ้นเคยกับยุทธวิธีแก้ปัญหามต่างๆ ที่เหมาะสมและหลากหลายแล้ว นักเรียนสามารถเลือกยุทธวิธีเหล่านั้นมาใช้ได้ทันที ยุทธวิธีแก้ปัญหามที่เป็นเครื่องมือสำคัญและสามารถนำมาใช้ในการแก้ปัญหามได้ดี ที่พบบ่อยในคณิตศาสตร์มีดังนี้

- (1) ยุทธวิธีค้นหาแบบรูป
- (2) ยุทธวิธีเขียนภาพหรือแผนภาพ
- (3) ยุทธวิธีสร้างตาราง
- (4) ยุทธวิธีแจกแจงรายการ
- (5) ยุทธวิธีเดาและตรวจสอบ
- (6) ยุทธวิธีทำย้อนกลับ
- (7) ยุทธวิธีเปลี่ยนมุมมอง

(8) ยุทธวิธีทำปัญหาให้ง่ายหรือแบ่งเป็นปัญหาย่อย เป็นต้น

1. ยุทธวิธีค้นหาแบบรูป

แบบรูปเป็นสิ่งที่ปรากฏอยู่แล้วในธรรมชาติและเป็นสิ่งที่มนุษย์สร้างขึ้น แบบรูปเป็นสาระสำคัญที่เด่นชัดในคณิตศาสตร์ การค้นหาและการใช้แบบรูปสามารถประยุกต์ได้อย่างกว้างขวางในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เด็กเล็ก ๆ สามารถค้นหาและพรรณนาแบบรูปได้จากการร้อยลูกปัด การเดินไม้บล็อก และแม้กระทั่งการเล่นตีกอล์ฟ ในระดับประถมศึกษาเด็กสามารถค้นหาและอธิบายแบบรูปของจำนวน (number pattern) เช่น 2, 4, 6, 8, ..., 30, 27, 24, 21, ... นักเรียนที่มีวุฒิภาวะสูงกว่าจะทำกิจกรรมเกี่ยวกับแบบรูปที่เป็นนามธรรมและมีความซับซ้อนได้ดีกว่า

เป้าหมายหนึ่งของคณิตศาสตร์คือการให้นักเรียนสามารถสร้างความเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์และสร้างนัยทั่วไปของผลลัพธ์จากการสำรวจศึกษาปัญหาหนึ่งไปสู่ปัญหาอื่น ๆ ที่เกี่ยวข้องกัน ครูจำต้องระลึกไว้เสมอว่าไม่ใช่ นักเรียนทุกคนที่แม้ว่าจะเข้าใจวิธีการแก้ปัญหาแบบรูปของจำนวน จะมีความเข้าใจอย่างลึกซึ้งถึงการสร้างนัยทั่วไปที่พัฒนาจากการค้นหาแบบรูป นักเรียนบางคนอธิบายได้ในเชิงถ้อยคำ บางคนสามารถแทนนัยทั่วไปได้ด้วยนิพจน์ทางพีชคณิต ทั้งนี้ขึ้นอยู่กับพื้นฐานความรู้

2. ยุทธวิธีเขียนภาพหรือแผนภาพ

เด็กเล็กค่อนข้างจะมีความยากลำบากในการใช้สัญลักษณ์เพื่อแก้ปัญหา ทางเลือกที่ดีทางหนึ่งที่เป็นรูปธรรมกว่าคือการใช้ภาพและแผนภาพ สำหรับเด็กเล็กสามารถใช้ภาษาที่แทนด้วยรูปภาพใน การบันทึกข้อสนเทศเกี่ยวกับการแก้ปัญหา เมื่อเด็กมีวุฒิภาวะสูงขึ้น สิ่งแทนด้วยรูปภาพและแผนภาพ จะเปลี่ยนไปเป็นตัวเลขและนิพจน์อย่างอื่นทางคณิตศาสตร์ การเขียนภาพหรือแผนภาพช่วยให้เด็กเข้าใจปัญหาได้ง่ายขึ้น และบางครั้งสามารถหาคำตอบของปัญหาได้โดยตรงจากการเขียนภาพหรือแผนภาพนั้น

3. ยุทธวิธีสร้างตาราง

ยุทธวิธีสร้างตารางเป็นการจัดกระทำกับข้อมูลที่เกี่ยวข้องกับปัญหาให้เป็นระบบ มีระเบียบ โดยนำมาเขียนลงในตารางช่วยให้มองเห็นความสัมพันธ์ของข้อมูล ซึ่งนำไปสู่การหา

คำตอบที่ต้องการใช้ยุทธวิธีสร้างตารางในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ มีประเด็นที่ควรพิจารณาดังนี้

- สร้างตารางเพื่อแสดงกรณีต่าง ๆ ที่เป็นไปได้ทั้งหมด
- สร้างตารางเพื่อแสดงกรณีที่เป็นไปได้บางกรณี
- สร้างตารางเพื่อค้นหาความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูล 2 ชุด (หรือมากกว่า)
- สร้างตารางเพื่อค้นหาแนวโน้มทั่วไปของความสัมพันธ์

ยุทธวิธีสร้างตารางสามารถใช้ร่วมกับยุทธวิธีแก้ปัญหาอย่างอื่น เช่น การเดาและ

ตรวจสอบ การค้นหาแบบรูป

4. ยุทธวิธีแจกแจงรายการ

การแจกแจงรายการเป็นการนำเสนอสิ่งที่เกี่ยวข้องกับการแก้ปัญหาได้แก่ ข้อมูลที่กำหนด กรณีต่าง ๆ ที่เกิดขึ้นจากข้อมูลที่กำหนด โดยนำเสนอให้เป็นระบบ มีระเบียบ ครบถ้วน เป็นหมวดหมู่ ป้องกันการเสนอซ้ำซ้อน อาจนำเสนอในรูปตาราง เพื่อให้การพิจารณาใช้ประโยชน์จากข้อมูลทำได้สมบูรณ์ การแจกแจงรายการอาจนำเสนออย่างครบถ้วนทุกประเด็น เมื่อมีกรณีต่าง ๆ ที่จะนำเสนอมีจำนวนจำกัด หรืออาจนำเสนอเพียงบางรายการที่จำเป็นและเพียงพอต่อการหาคำตอบของปัญหาก็ได้

5. ยุทธวิธีเดาและตรวจสอบ

การแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์โดยใช้ยุทธวิธีเดาและตรวจสอบ เป็นการพิจารณาข้อมูลและเงื่อนไขต่าง ๆ ที่ปัญหากำหนดให้ ผสมผสานกับประสบการณ์เดิมที่เกี่ยวข้องนำมาใช้เป็นกรอบในการเดาคำตอบของปัญหา แล้วตรวจสอบความถูกต้อง ถ้าไม่ถูกต้องก็เดาใหม่ โดยอาศัยประโยชน์จากความไม่ถูกต้องของการเดาในครั้งแรก ๆ ใช้เป็นข้อมูลในการสร้างกรอบในการเดาครั้งต่อไปที่มีขอบเขตแคบลง มีความชัดเจนมากยิ่งขึ้น และเข้าถึงคำตอบของปัญหาได้เร็วขึ้น การเดาต้องเดาอย่างมีเหตุผล มีทิศทางเพื่อให้สิ่งที่เดานั้นเข้าใกล้คำตอบที่ต้องการมากที่สุด

6. ยุทธวิธีทำย้อนกลับ

ยุทธวิธีทำย้อนกลับเป็นยุทธวิธีเฉพาะซึ่งสามารถประยุกต์ใช้กับปัญหาบางปัญหาที่การแก้ปัญหาเริ่มต้นจากสิ่งที่ปัญหากำหนดให้แล้วหาความเชื่อมโยงไปสู่สิ่งที่ปัญหาต้องการซึ่งทำได้ค่อนข้างยาก แต่การเริ่มต้นพิจารณาจากสิ่งที่ปัญหาต้องการแล้วหาความเชื่อมโยงย้อนกลับไปสู่สิ่งที่ปัญหากำหนดให้ทำได้ง่ายกว่า เป็นยุทธวิธีที่มีคุณค่าสำหรับนักเรียนในการเรียนรู้ เป็น

วิธีการที่ชาญฉลาด ในการช่วยให้นักเรียนได้พัฒนาทักษะการให้เหตุผล เป็นยุทธวิธีที่ใช้การคิดวิเคราะห์จากผลไปหาเหตุ

7. ยุทธวิธีเปลี่ยนมุมมอง

การเปลี่ยนมุมมองดูเหมือนว่าจะเป็นแนวทางของการคิดมากกว่าที่จะเป็นยุทธวิธี ยุทธวิธีนี้ บางทีเรียก “หยุดคิดก่อน” (breaking out) เพราะว่าผู้แก้ปัญหา ต้องหยุดคิดมองปัญหาให้รอบด้าน หาวิธี หามุมมองของปัญหาใหม่ ซึ่งอาจแปลกแยกไปจากวิธีปกติธรรมดา

8. ยุทธวิธีทำปัญหาให้ง่ายหรือแบ่งเป็นปัญหาย่อย

ปัญหาบางปัญหามีเหมือนเป็นปัญหาใหญ่อาจเป็นด้วยขนาดของจำนวนหรือความซับซ้อน ของปัญหา การทำปัญหาให้ง่ายลงจะช่วยให้สามารถกำหนดแนวคิดในการแก้ปัญหา และนำแนวคิดนั้นมาใช้แก้ปัญหาก็กำหนดได้ วิธีการหนึ่งในการทำปัญหาให้ง่ายคือการแบ่งปัญหาวออกเป็น ส่วนย่อย ๆ หรือเริ่มต้นด้วยปัญหาที่มีระดับความซับซ้อนน้อยลง การทำปัญหาให้ง่ายสามารถนำมาใช้เพื่อให้สามารถค้นหาแบบรูปของการหาคำตอบได้

4.2 ตัวอย่างการแก้ปัญหตามยุทธวิธี

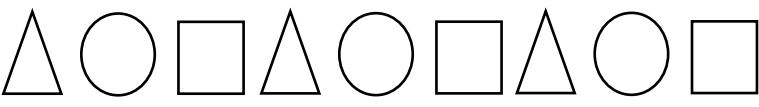
ตัวอย่างการแก้ปัญหของนักคณิตศาสตร์ที่มีชื่อเสียงได้แก่ การแก้ปัญหของ คาร์ล ฟรีดริช เกาส์ (Carl Friedrich Gauss ; ค.ศ. 1777 – 1855) นักคณิตศาสตร์ผู้มีชื่อเสียงชาวเยอรมัน ขณะที่เด็กชายเกาส์เรียนอยู่ในระดับประถมศึกษา เล่ากันว่าครูของเด็กชายเกาส์ไม่ยอมสอนในบ่าย วันหนึ่ง เลยให้ปัญหาคณิตศาสตร์แก่นักเรียน โดยคิดว่านักเรียนต้องใช้เวลาในการคิดแก้ปัญหานานพอที่จะทำให้เวลาเรียนหมดไป ผลปรากฏว่าเด็กชายเกาส์ สามารถหาคำตอบของปัญหาได้ภายใน 2-3 นาที ซึ่งเป็นที่ประหลาดใจของครูและผู้รู้เรื่องนี้เป็นอย่างมาก ปัญหาดังกล่าว มีใจความว่า

จงหาผลบวกของจำนวนเต็มบวกตั้งแต่ 1 ถึง 100

สังเกตการณ์จับคู่บวกกันของจำนวนที่อยู่ปลาย ทั้งสองข้าง ผลบวกของทุกคู่ คือ 101

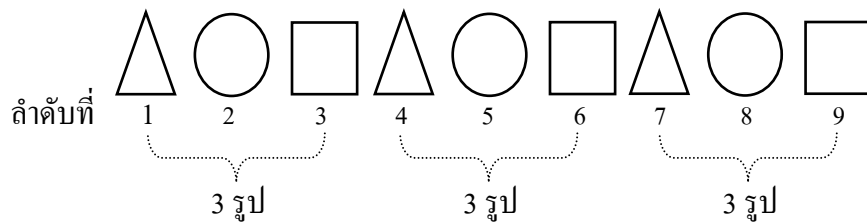
$$\begin{array}{c}
 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 97 + 98 + 99 + 100 \\
 \hline
 3 + 98 = 101 \\
 2 + 99 = 101 \\
 1 + 100 = 101
 \end{array}$$

- การจับคู่บวกกันของจำนวนที่อยู่ปลายทั้งสองข้าง ผลบวกของทุกคู่ คือ 101
- จำนวนเต็มบวกตั้งแต่ 1 ถึง 100 มีทั้งหมด 100 จำนวน จับคู่ได้ $(100 \div 2) = 50$ คู่
- ดังนั้น $1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 97 + 98 + 99 + 100 = 50 \times 101 = 5,050$

ปัญหาที่ 1 : 

ถ้าเรียงรูปเรขาคณิตแบบนี้ไปเรื่อย ๆ อยากทราบว่า รูปที่ 37 คือ รูปอะไร
แนวคิดที่ 1

พิจารณาลักษณะการเรียงกันของรูปทั้งสามแบบ



- เรียงสลับเป็นชุด ๆ ละ 3 รูป

										
ลำดับที่		1	2	3	4	5	6	7	8	9
ลำดับที่ $\div 3$	ผลหาร	0	0	1	1	1	2	2	2	3
	เศษ	1	2	0	1	2	0	1	2	0

- จากการสังเกต พบว่า เศษของการหารมีความสัมพันธ์กับรูปภาพ ดังนี้

- ผลหารของลำดับที่ด้วย 3 ถ้าเหลือเศษ 1 -----> 
- ผลหารของลำดับที่ด้วย 3 ถ้าเหลือเศษ 2 -----> 
- ผลหารของลำดับที่ด้วย 3 ถ้าลงตัวหรือเหลือเศษ 0 -----> 

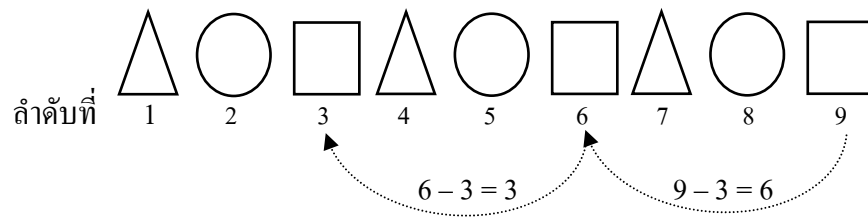
ดังนั้นรูปที่ 37 คือ รูปอะไร ด้วยการเอา 37 ไปหารด้วย 3 แล้วสังเกตเศษที่เหลือ

- จาก $37 \div 3 = 12$ เศษ 1

- แสดงว่า รูปที่ 37 คือ รูปสามเหลี่ยม 

แนวคิดที่ 2

พิจารณาลักษณะการเรียงกันของรูปทั้งสามแบบ



- ลำดับของแต่ละรูป จะลดลงทีละ 3

 $7 - 3 = 4$, $4 - 3 = 1$

 $8 - 3 = 5$, $5 - 3 = 2$

 $9 - 3 = 6$, $6 - 3 = 3$, $3 - 3 = 0$

- ลำดับที่นับลดทีละ 3 ไปเรื่อย ๆ ถ้าเหลือ 1 ลำดับนั้นคือ 

- ลำดับที่นับลดทีละ 3 ไปเรื่อย ๆ ถ้าเหลือ 2 ลำดับนั้นคือ 

- ลำดับที่นับลดทีละ 3 ไปเรื่อย ๆ ถ้าเหลือ 0 ลำดับนั้นคือ 

ดังนั้นรูปที่ 37 คือ รูปอะไรหาคำตอบ ด้วยการเอา 37 มานับลดทีละ 3 ผลเป็น
ดังนี้ 37 , 34 , 31 , 28 , 25 , 22 , 19 , 16 , 13 , 10 , 7 , 4 , 1

- แสดงว่า รูปที่ 37 คือ รูปสามเหลี่ยม 

ปัญหาที่ 2 : จงเติมเลขโดด 1, 2, 3 และ 4 ลงในช่องว่างที่เหลือ โดยไม่ซ้ำกัน ผลลบที่มี
ค่าน้อยที่สุด มีค่าเท่าใด

$$\boxed{6}\boxed{}\boxed{} - \boxed{5}\boxed{}\boxed{} = \boxed{} \text{ น้อยที่สุด}$$

แนวคิดที่ 1

ใช้การแจกแจงกรณีที่เป็นไปได้ทั้งหมด ในการเติมเลขโดดในช่องว่าง แล้วเขียน
ตาราง ดังนี้

$6\boxed{}$	$5\boxed{}$	$6\boxed{} - 5\boxed{}$	
612	534	78	
612	543	69	-----> น้อยที่สุด
621	534	87	
621	543	78	
613	524	89	
613	542	71	
631	524	107	
631	542	89	
614	523	91	
614	532	82	
641	523	118	
641	532	109	
623	514	109	

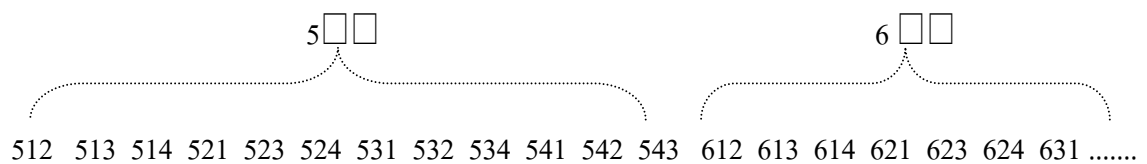
623	541	82
632	514	118
632	541	91
624	513	111
624	531	93
642	513	129
642	531	111
634	512	122
634	521	113
643	512	131
643	521	122

$$\boxed{6}\boxed{}\boxed{} - \boxed{5}\boxed{}\boxed{} = \boxed{\text{น้อยที่สุด}}$$

$$\boxed{6}\boxed{1}\boxed{2} - \boxed{5}\boxed{4}\boxed{3} = \boxed{69}$$

แนวคิดที่ 2

แจกแจงกรณีทั้งหมดในการเติมเลขโดดใน ช่องว่างที่เป็นไปได้ แล้วเขียน
เรียงลำดับจากน้อยไปหามาก ดังนี้



การนำจำนวนสองจำนวนลบกัน ก็คือการหาผลต่างหรือระยะห่างของจำนวนทั้งสอง
 ดังนั้น จำนวนทั้งสองจะมีผลต่างที่มีค่าน้อยที่สุด จำนวนทั้งสองก็ต้องมีระยะห่างน้อยที่สุด หรือ
 อยู่ใกล้กันมากที่สุด ดังนี้

512 513 514 521 523 524 531 532 534 541 542 543 612 613 614 621 623 624 631

$$612 - 543 = 69$$

$$\boxed{6}\boxed{1}\boxed{2} - \boxed{5}\boxed{4}\boxed{3} = \boxed{69}$$

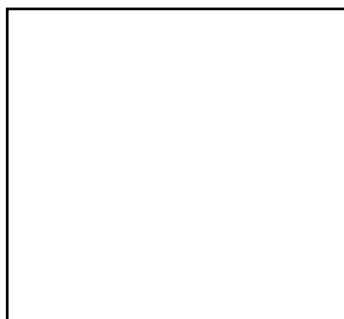
ปัญหาที่ 3 : น้องเอย นำเงินครึ่งหนึ่งของเงินที่มีอยู่ไปซื้อสมุด แล้วนำเงินอีกครึ่งหนึ่งของ
 เงินที่เหลือไปซื้อดินสอ ปรากฏว่าเหลือเงินอยู่ 6 บาท อยากทราบว่า น้องเอย ใช้เงินไปทั้งหมดกี่
 บาท

แนวคิดที่ 1

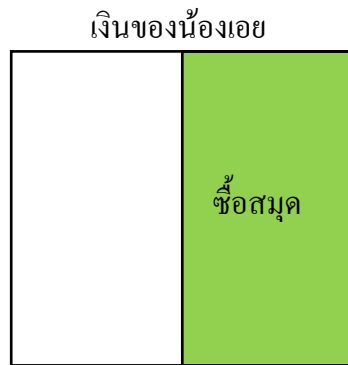
พิจารณาเงื่อนไขแล้วเขียนภาพตามเงื่อนไข ดังนี้

- สมมติให้สี่เหลี่ยมแทนเงินทั้งหมดที่มี

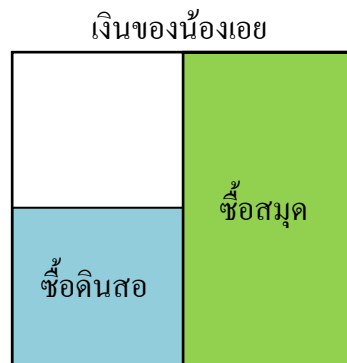
เงินของน้องเอย



- จากการที่น้องเอย ใช้เงินครึ่งหนึ่งซื้อสมุด ให้แบ่งสี่เหลี่ยมครึ่งหนึ่ง หรือ แบ่งเป็น 2 ส่วนเท่า ๆ กัน ให้ครึ่งหนึ่งเป็นค่าสมุด จะได้รูป ดังนี้



- จากการนำเงินอีกครึ่งหนึ่งของเงินที่เหลือไปซื้อดินสอ ให้แบ่งสี่เหลี่ยมส่วนที่เหลือออกเป็น 2 ส่วนเท่า ๆ กัน ให้ส่วนหนึ่งเป็นค่าดินสอ จะได้รูป ดังนี้



- จากการซื้อของแล้วเหลือเงินอยู่ 6 บาท แสดงว่า ส่วนที่เหลือ ก็คือ เงิน 6 บาท

เงินของน้องเอ

6 บาท	ซื้อสมุด
ซื้อดินสอ	

- เนื่องจากทั้ง 2 ส่วนเท่ากันแสดงว่า ราคาดินสอ คือ 6 บาท

เงินของน้องเอ

6 บาท	ซื้อสมุด
ซื้อดินสอ 6 บาท	

- เนื่องจากทั้ง 2 ส่วนเท่ากันแสดงว่า ราคาสมุด คือ 12 บาท

เงินของน้องเอ

6 บาท	ซื้อสมุด 12 บาท
ซื้อดินสอ 6 บาท	

- ดังนั้น น้องเอ ใช้เงินไปทั้งหมด $6 + 12 = 18$ บาท

แนวคิดที่ 2

พิจารณาเงื่อนไขแล้วคิดย้อนกลับ ดังนี้

- จากจำนวนเงินที่เหลือ 6 บาท ซึ่งก่อนหน้านี้ นำเงินครึ่งหนึ่งไปซื้อดินสอ แสดงว่าราคาดินสอ คือ 6 บาท ดังนั้น จำนวนเงินก่อนซื้อดินสอ คือ $6 + 6 = 12$ บาท
- จากจำนวนเงินก่อนซื้อดินสอ คือ 12 บาท ซึ่งก่อนหน้านี้ นำเงินครึ่งหนึ่งไปซื้อสมุด แสดงว่าราคาสมุด คือ 12 บาท ดังนั้น จำนวนเงินก่อนซื้อสมุด คือ $12 + 12 = 24$ บาท
- ดังนั้น น้องเอย มีเงินทั้งหมด 24 บาท ซื้อสมุด 12 บาท และ ซื้อดินสอ 6 บาท เหลือเงิน 6 บาท สรุปแล้ว ใช้เงินไป $12 + 6 = 18$ บาท

ปัญหาที่ 4 : คุณพ่อเลี้ยงหมูและไก่ รวมกันทั้งหมด 15 ตัว นับขารวมกันได้ 42 ขา คุณพ่อเลี้ยงหมูและไก่อย่างละกี่ตัว

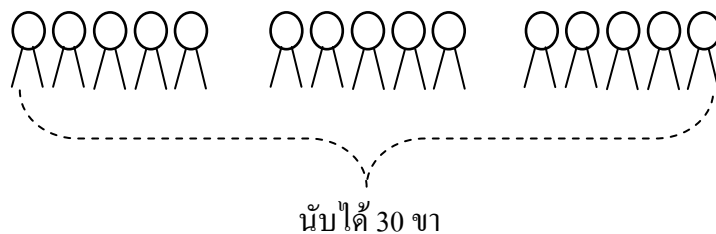
แนวคิดที่ 1

สร้างภาพดังนี้

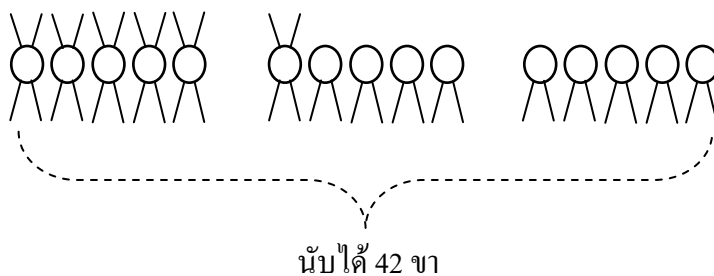
- สมมติให้ ○ แทนหมู หรือ ไก่ 1 ตัว และจากที่มีตัวหมูและไก่ รวมกันทั้งหมด 15 ตัว
- เขียนภาพได้ดังนี้

○○○○○ ○○○○○ ○○○○○

- มีขารวมกัน 42 ขา ซึ่งหมู มี 4 ขา และไก่ มี 2 ขา เขียนภาพโดยเริ่มจากเขียนขา วงกลมละ 2 ขาก่อน

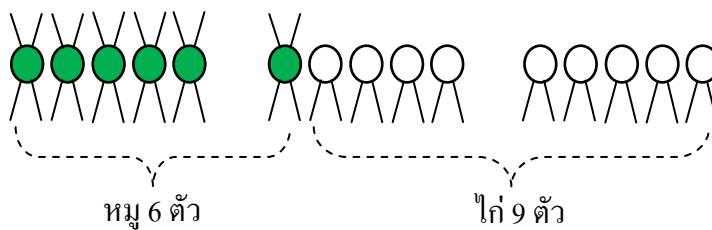


- เขียนครบแล้วนับขาได้ 30 ขา ซึ่งเหลือขาอีก 12 ขา ดังนั้น เขียนขาเพิ่ม วงกลมละ 2 ขาจนกว่าจะครบ



จากแผนภาพที่เขียน มีตัว 15 ตัว และมีขา 42 ขา ครบตามที่กำหนด แล้วจะนับหมู และไก่
อย่างไร

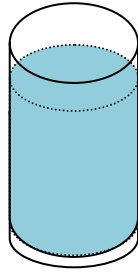
- จาก หมู มี 4 ขา และไก่ มี 2 ขา



- ดังนั้น คุณพ่อเลี้ยงหมู 6 ตัว และ ไก่ 9 ตัว

- จากแผนภาพแสดงว่าคุณพ่อเลี้ยงหมู 6 ตัว และ ไก่ 9 ตัว ซึ่งนับตัวรวมกันได้
 $6 + 9 = 15$ ตัว และ นับขารวมกันได้ $(6 \times 4) + (9 \times 2) = 24 + 18 = 42$ ขา แสดงว่าถูกต้อง

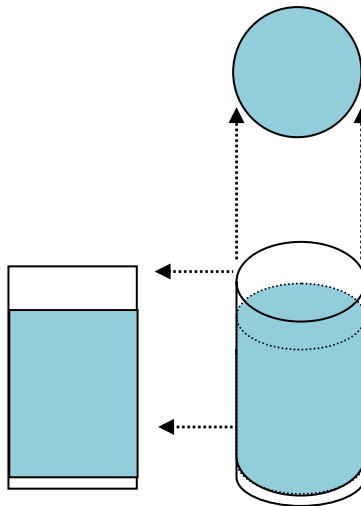
ปัญหาที่ 5 : แก้วน้ำทรงกระบอกใบหนึ่ง มีน้ำเกินครึ่งแต่ไม่เต็มแก้ว ถ้าต้องการน้ำครึ่งแก้วพอดี จะทำอย่างไร



แนวคิดที่ 1

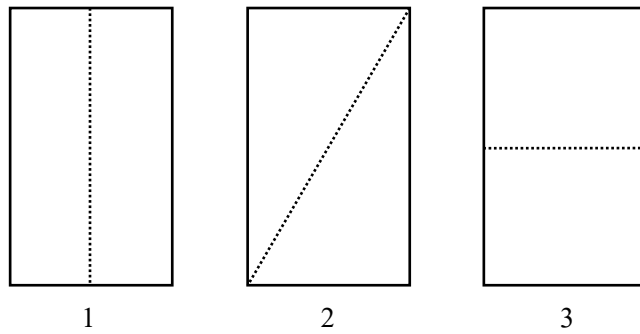
ให้เปลี่ยนมุมมองของการมองแก้ว ในมุมต่าง ๆ

- มองจากด้านบน แก้วทรงกระบอกเป็นรูป วงกลม
- มองจากด้านข้าง แก้วทรงกระบอกเป็นรูป สี่เหลี่ยมผืนผ้า



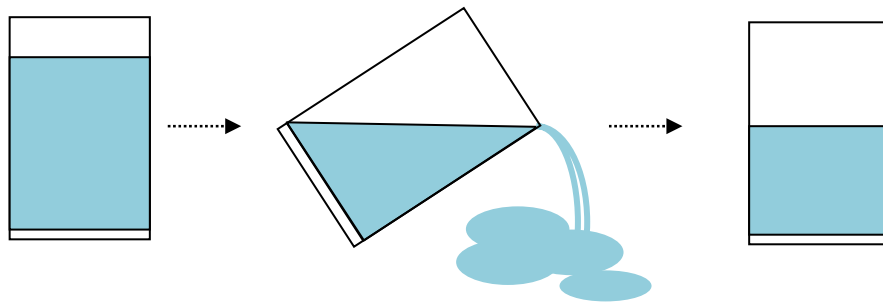
มองแก้วทรงกระบอก เป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า แล้วร่วมกันพิจารณาการแบ่งรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าออกเป็น 2 ส่วนเท่า ๆ กัน แทนการแบ่งน้ำครึ่งแก้ว ดังนี้

- การแบ่งรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า ออกเป็น 2 ส่วน ทำได้หลายแบบ เช่น



ร่วมกันพิจารณา และร่วมกันสรุปว่าจะใช้ความรู้เรื่องนี้มาแบ่งน้ำให้เหลือครึ่งแก้วได้อย่างไร และจะดำเนินการอย่างไร

- จะแบ่งน้ำ ตามแบบที่ 2 โดยจะค่อย ๆ เอียงแก้ว รินน้ำออก จนกว่าระดับน้ำจะอยู่ในระดับแนวเส้นทแยงมุม แล้วจะเหลือน้ำในแก้วครึ่งหนึ่งพอดี ดังรูป



ปัญหาที่ 6 : มีเรือ 3 ลำ เป็น เรือประมง เรือใบ และ เรือบรรทุกสินค้า ซึ่งทำสีไม่ซ้ำกัน มีสีน้ำเงิน สีชมพู และสีเขียว ถ้าทราบข้อมูลว่า

- เรือประมงกำลังออกจากฝั่ง ขณะที่เรือสีเขียว กำลังมุ่งหน้าเข้าสู่ฝั่ง
- เรือสีชมพู กำลังกางใบอยู่ใกล้ชายฝั่ง

อยากทราบว่า “ เรือบรรทุกสินค้าทำสีอะไร ”

แนวคิดที่ 1

พิจารณาเงื่อนไขและสร้างตาราง ดังนี้

สีเรือ	ประเภท		
	เรือประมง	เรือใบ	เรือบรรทุกสินค้า
ชมพู			
เขียว			
น้ำเงิน			

- ทำเครื่องหมาย ✓ ในช่องที่สีเรือตรงกับประเภทเรือ

✗ ในช่องที่สีเรือไม่ตรงกับประเภทเรือ

-จาก “ เรือสีชมพู กำลังกางใบอยู่ใกล้ชายฝั่ง ” แสดงว่า เรือสีชมพู คือ เรือใบ

สีเรือ	ประเภท		
	เรือประมง	เรือใบ	เรือบรรทุกสินค้า
ชมพู	✗	✓	✗
เขียว		✗	
น้ำเงิน		✗	

- จาก “ เรือประมงกำลังออกจากฝั่ง ขณะที่เรือสี่เหลี่ยม กำลังมุ่งหน้าเข้าสู่ฝั่ง ”
แสดงว่า เรือประมง ไม่ใช่เรือสี่เหลี่ยม

สีเรือ	ประเภท		
	เรือประมง	เรือใบ	เรือบรรทุกสินค้า
ชมพู	✕	✓	✕
เขียว	✕	✕	
น้ำเงิน		✕	

- สังเกตว่า ในตาราง เรือประมง เป็นเรือสีน้ำเงิน

สีเรือ	ประเภท		
	เรือประมง	เรือใบ	เรือบรรทุกสินค้า
ชมพู	✕	✓	✕
เขียว	✕	✕	
น้ำเงิน	✓	✕	✕

- สังเกตว่า ในตาราง เรือบรรทุกสินค้า เป็นเรือสีเขียว

สีเรือ	ประเภท		
	เรือประมง	เรือใบ	เรือบรรทุกสินค้า
ชมพู	✕	✓	✕
เขียว	✕	✕	✓
น้ำเงิน	✓	✕	✕

ปัญหาที่ 7 : น้องหมวย มีเงินอยู่ 410 บาท เป็นธนบัตรใบละ 50 บาท และ 20 บาท รวม 13 ใบอยากทราบว่า น้องหมวย มีธนบัตรใบละ 50 บาท และ 20 บาท อย่างละกี่ฉบับ

แนวคิดที่ 1

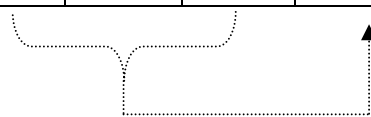
1) พิจารณาเงื่อนไขและสร้างตาราง ซึ่งจากเงื่อนไข มีธนบัตรใบละ 50 บาท และ 20 บาท รวม 13 ฉบับ สามารถแจกแจงกรณี ได้ดังนี้

ธนบัตร 50		ธนบัตร 20		รวม ทั้งหมด (บาท)
จำนวน (ฉบับ)	รวม (บาท)	จำนวน (ฉบับ)	รวม (บาท)	
13		0		
12		1		
11		2		
10		3		
9		4		
8		5		
7		6		
6		7		
5		8		
4		9		
3		10		
2		11		
1		12		
0		13		

รวมกัน 13 ฉบับ

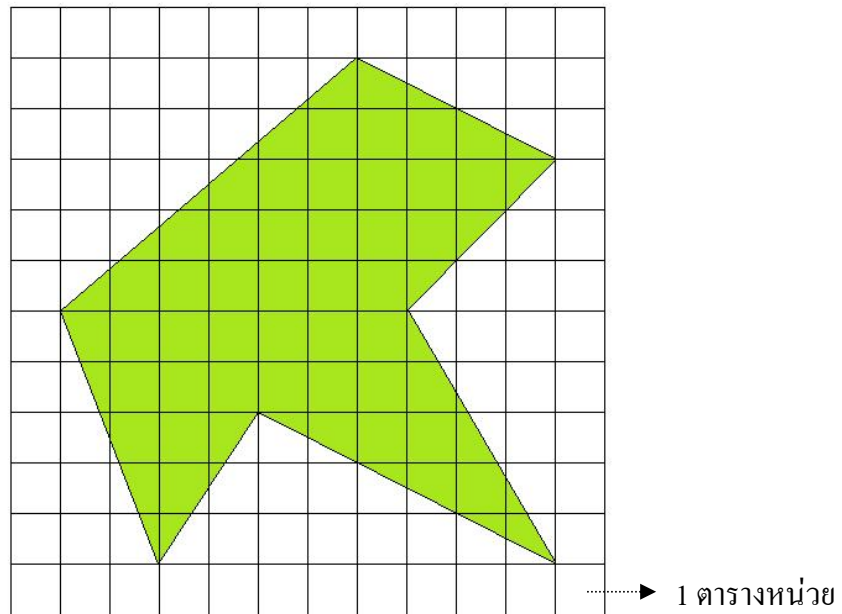
2) หาเงินรวมของแต่ละกรณี ได้ดังนี้

ธนบัตร 50		ธนบัตร 20		รวม ทั้งหมด (บาท)
จำนวน (ฉบับ)	รวม (บาท)	จำนวน (ฉบับ)	รวม (บาท)	
13	650	0	0	650
12	600	1	20	620
11	550	2	40	590
10	500	3	60	560
9	450	4	80	530
8	400	5	100	500
7	350	6	120	470
6	300	7	140	440
5	250	8	160	410
4	200	9	180	380
3	150	10	200	350
2	100	11	220	320
1	50	12	240	290
0	0	13	260	260


 รวมกัน

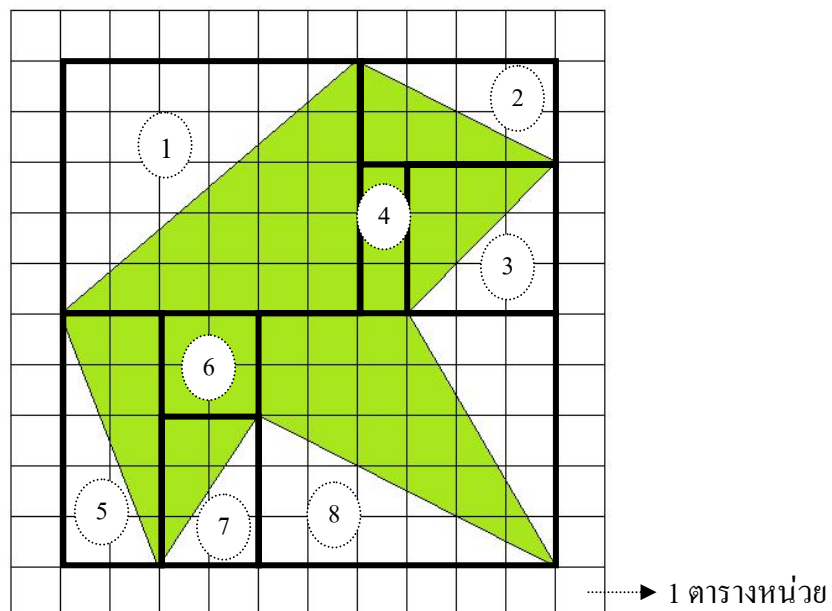
- จากตารางจะพบว่า น้องหมี มีเงินอยู่ 410 บาท เป็นธนบัตรใบละ 50 บาท จำนวน 5 ฉบับ และธนบัตรใบละ 20 บาท จำนวน 8 ฉบับ

ปัญหาที่ 8 : ถ้า  มีพื้นที่ 1 ตารางหน่วย จงหาพื้นที่ส่วนที่แรเงา



แนวคิดที่ 1

พิจารณารูปภาพ เพื่อแบ่งออกเป็นรูปย่อยๆ ที่จะสามารถหาพื้นที่ได้ ซึ่งอาจสามารถแบ่งได้หลาย ๆ วิธี ตัวอย่างเช่น



สังเกตส่วนย่อยที่แบ่งออก ว่าเป็นรูปสี่เหลี่ยมซึ่งเส้นรอบรูปของรูปที่แรเงา ก็คือเส้นทแยงมุมในบางส่วนนั่นเอง และทำให้ได้ว่าพื้นที่ส่วนที่แรเงา มีขนาดเป็นครึ่งหนึ่งของรูปสี่เหลี่ยมรูปนั้น ซึ่งหาได้ดังนี้

- ส่วนย่อย 1 พื้นที่ทั้งหมด 30 ตารางหน่วย ส่วนที่แรเงา 15 ตารางหน่วย
 - ส่วนย่อย 2 พื้นที่ทั้งหมด 8 ตารางหน่วย ส่วนที่แรเงา 4 ตารางหน่วย
 - ส่วนย่อย 3 พื้นที่ทั้งหมด 9 ตารางหน่วย ส่วนที่แรเงา 4.5 ตารางหน่วย
 - ส่วนย่อย 4 พื้นที่ทั้งหมด 3 ตารางหน่วย ส่วนที่แรเงา 3 ตารางหน่วย
 - ส่วนย่อย 5 พื้นที่ทั้งหมด 10 ตารางหน่วย ส่วนที่แรเงา 5 ตารางหน่วย
 - ส่วนย่อย 6 พื้นที่ทั้งหมด 4 ตารางหน่วย ส่วนที่แรเงา 4 ตารางหน่วย
 - ส่วนย่อย 7 พื้นที่ทั้งหมด 6 ตารางหน่วย ส่วนที่แรเงา 3 ตารางหน่วย
 - ส่วนย่อย 8 พื้นที่ทั้งหมด 30 ตารางหน่วย
- ∴ ส่วนที่แรเงา $30 - 9 - 7.5 = 13.5$ ตารางหน่วย

- ดังนั้น จากรูปพื้นที่ส่วนที่แรเงา คือ

$$15 + 4 + 4.5 + 3 + 5 + 4 + 3 + 13.5 = 52 \text{ ตารางหน่วย}$$

ปัญหาที่ 9 : ถ้า A และ B แทนเลขโดดที่ไม่ซ้ำกัน จงหาค่าของ A และ B ที่ทำให้ผลบวกต่อไปนี้ เป็นจริง

$$AAB + BA = 621$$

แนวคิดที่ 1

1) วิเคราะห์และนำเสนอให้ผู้เข้ารับการอบรม สังเกตผลบวกแล้วแจกแจงกรณีที่เป็นไปได้ทั้งหมดของ A และ B

$$AAB + BA = 621$$

- จาก $B + A$ ผลบวกเป็น 1 หรือ มากกว่า 1 แต่หลักหน่วยเป็น 1 ค่าของ A และ B เป็น 0 ไม่ได้
- จากผลบวกหลักร้อย คือ 6 ดังนั้น A จะมีค่ามากกว่า 6 ไม่ได้

- จากผลบวกหลักร้อย คือ 6 ดังนั้น A จะมีค่าน้อยกว่า 5 ไม่ได้ เพราะ ผลบวกของ เลขโดด 2 ตัว มีค่าสูงสุด คือ $9 + 9 = 18$ หลักสิบสูงสุดคือ 1 ถ้า A น้อยกว่า 5 ผลบวกหลักร้อยจะไม่มีทางเป็น 6 ดังนั้น กรณีที่เป็นไปได้ทั้งหมด คือ

A	B	B + A	
0	1	1	เป็นไปได้
1	0	1	เป็นไปได้
2	9	11	เป็นไปได้
3	8	11	เป็นไปได้
4	7	11	เป็นไปได้
5	6	11	เป็นไปได้
6	5	11	เป็นไปได้
7	4	11	เป็นไปได้
8	3	11	เป็นไปได้
9	2	11	เป็นไปได้

- นำค่าของ A และ B ไปตรวจสอบคำตอบ

A	B	AAB + BA
5	6	$556 + 65 = 621$
6	5	$665 + 56 = 721$

- ดังนั้น A คือ 5 และ B คือ 6 ที่ทำให้ $AAB + BA = 621$ เป็นจริง

4.3 การสร้างความสัมพันธ์ของปัญหาคณิตศาสตร์

ผู้ที่เก่งคณิตศาสตร์อย่างแท้จริง
ไม่ใช่ผู้ที่จดจำสูตรซับซ้อนต่างๆ ได้ทั้งหมด
แต่เป็นผู้ที่มีวิธีการคิดจากการสังเกตสร้างความ
เชื่อมโยงปัญหาได้อย่างดี

จงใช้การสังเกตเพื่อหาข้อสรุป

$$11 \times 25 = 275$$

$$11 \times 41 = 451$$

$$11 \times 63 = 693$$

$$11 \times 74 = 814$$

พบว่า

$$11 \times 25 = 2 \text{ } 7 \text{ } 5$$


$2+5$

$$11 \times 41 = 4 \text{ } 5 \text{ } 1$$


$4+1$

$$11 \times 63 = 6 \text{ } 9 \text{ } 3$$


$6+3$

1

$$11 \times 74 = 7 \overset{1}{4} = 814$$



$$234 \times 11 = 23 \overset{2}{7} 4 = 2574$$



ในกรณีที่เป็นเลขสามหลัก

$$\begin{array}{c} \vdots \\ 12\bar{5} \end{array} \times 11 = 12 \overset{1}{7} 5 = 1375$$

$$\begin{array}{c} \vdots \\ 39\bar{4} \end{array} \times 11 = 39 \overset{4}{3} 4 = 4334$$

ในกรณีที่เป็เลขตั้งแต่สี่หลักขึ้นไป

$$\begin{array}{c} \vdots \\ 321\bar{4} \end{array} \times 11 = 321 \overset{3}{5} \overset{2}{4} = 35354$$

$$\begin{array}{c} \vdots \\ 5132\bar{9} \end{array} \times 11 = 5132 \overset{5}{1} \overset{4}{9} = 564619$$

จงใช้การสังเกตเพื่อหาข้อสรุป

$$27 \times 23 = 621$$

$$58 \times 52 = 3016$$

$$95 \times 95 = 9025$$

$$31 \times 39 = 1209$$

พบว่า จำนวนที่นำมาคูณกัน ตัวหน้าเท่ากัน ตัวหลังบวกกันได้สิบ

$$27 \times 23 = 621$$

2×3

$$58 \times 52 = 3016$$

5×6

$$95 \times 95 = 9025$$

9×10

$$31 \times 39 = 1209$$

3×4

ฝึกการสังเกต

จงศึกษาตัวอย่าง แล้วเติมผลลัพธ์ลงในช่องว่างที่กำหนดให้
ชุดที่ 1

A $1^3 = 1^2$

B $1^3 + 2^3 = 9 = 3^2$

C $1^3 + 2^3 + 3^3 = 36 = 6^2$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3 = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$$

สรุป

A $1^3 = 1^2$

B $1^3 + 2^3 = 9 = 3^2 = (1 + 2)^2$

C $1^3 + 2^3 + 3^3 = 36 = 6^2 = (1 + 2 + 3)^2$

D $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = (1 + 2 + 3 + 4)^2$

$$\therefore 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \dots + n)^2$$

ชุดที่ 2

A $1 = 1^2$

B $1 + 3 = 2^2$

C $1 + 3 + 5 = 3^2$

$1 + 3 + 5 + 7 = \dots\dots\dots$

$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = \dots\dots\dots$

$1 + 3 + 5 + 7 + \dots + 19 = \dots\dots\dots$

$1 + 3 + 5 + \dots + 99 = \dots\dots\dots$

สรุป

$1 = 1^2$

$1 + 3 = 2^2$

$1 + 3 + 5 = 3^2$

$1 + 3 + 5 + \dots + 99 = 50^2$

$1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2 = (\text{จำนวนพจน์})^2$

ชุดที่ 3

$1 + 2 = 3 = (2 \times 3) \div 2$

$1 + 2 + 3 = 6 = (3 \times 4) \div 2$

$1 + 2 + 3 + 4 = 10 = (4 \times 5) \div 2$

$1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15 = (5 \times 6) \div 2$

$1 + 2 + 3 + \dots + 10 = = (\dots \times \dots) \div 2 = \dots\dots\dots$

$1 + 2 + 3 + \dots + 50 = = (\dots \times \dots) \div 2 = \dots\dots\dots$

$1 + 2 + 3 + \dots + 100 = = (\dots \times \dots) \div 2 = \dots\dots\dots$

4.4 การจัดระบบการคิด

การหาผลบวกที่เป็นจำนวนเต็มจากแนวคิดของเกาส์(Gauss)



เกาส์เกิดที่เมืองบรันสวิก (Braunschweig) ในวัยเยาว์เป็นที่กล่าวขวัญกันอย่างกว้างขวางว่า เกาส์เป็นอัจฉริยะทางด้านตัวเลข เมื่อชราแล้ว เกาส์ยังได้เล่ามุลตกว่า เขาสามารถบวกเลขได้ก่อนที่จะพูดได้เสียอีก กล่าวกันว่า เกอเต้ สามารถแต่งบทละครสำหรับเด็กได้ตั้งแต่อายุ 6 ขวบ ส่วน โมซาร์ท ก็สามารถแต่งทำนองเพลง Twinkle Twinkle Little Star ได้ตั้งแต่อายุ 5 ขวบ แต่สำหรับเกาส์แล้ว เป็นที่กล่าวกันว่า เกาส์สามารถตรวจสอบแก้ไขเลขบัญชีของบิดาได้ตั้งแต่อายุ 3 ขวบเท่านั้น

อย่างไรก็ตาม เหตุการณ์ที่แสดงความสามารถของเกาส์ให้คนทั่วไปได้ทราบ เกิดขึ้นเมื่อเขายังเป็นเด็กชายเกาส์อายุ 7 ขวบ ในห้องเรียนวันหนึ่ง ครูสั่งให้นักเรียนบวกเลขตั้งแต่ 1 ถึง 100 ครูเพียงแค่นั้นหลังไป เด็กชายเกาส์ก็ตอบขึ้นมาว่า 5,050 เมื่อถูกถามว่าได้คำตอบนั้นมาได้อย่างไร เด็กชายเกาส์เขียน

$$100 + 99 + 98 + \dots + 1 = 101 + 101 + 101 + \dots + 101 = 101 \times 50 = 5050$$

ดังนั้นคำตอบคือ 5050

จาก $1, 3, 5, 7, \dots, a_n$ เป็นลำดับของจำนวนที่

พบว่า $a_1 = 2 - 1 = 2(1) - 1$

$$a_2 = 4 - 1 = 2(2) - 1$$

$$a_3 = 6 - 1 = 2(3) - 1$$

$$a_4 = 8 - 1 = 2(4) - 1$$

$$a_n = 2n - 1 \text{ เมื่อ } n = 1, 2, 3, \dots$$

จงหาผลบวกของจำนวนที่บวก 243 จำนวนแรก

อธิบาย จำนวนที่ $\dots, -5, -3, -1, 1, 3, 5, 7, \dots$

จำนวนที่ลบ $\longleftarrow$ $\quad$ $\longrightarrow$ จำนวนที่บวก

จากโจทย์ หมายถึง $1 + 3 + 5 + \dots + a_{243}$

แต่ $a_n = 2n - 1$

$$a_{243} = 2(243) - 1 = 485$$

นั่นคือ $1 + 3 + 5 + \dots + 485 = \frac{243}{2} \times (1 + 485)$

จงหาผลบวกของจำนวนคู่บวก 243 จำนวนแรก

อธิบาย จำนวนคู่ $\dots, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, \dots$

จำนวนคู่ลบ $\longleftarrow$ $\quad$ $\longrightarrow$ จำนวนคู่บวก

จากโจทย์ หมายถึง $2 + 4 + 6 + \dots + a_{243}$

แต่ $a_n = 2n$

$$a_{243} = 2(243) = 486$$

นั่นคือ $2 + 4 + 6 + \dots + 486 = \frac{243}{2} \times (2 + 486)$

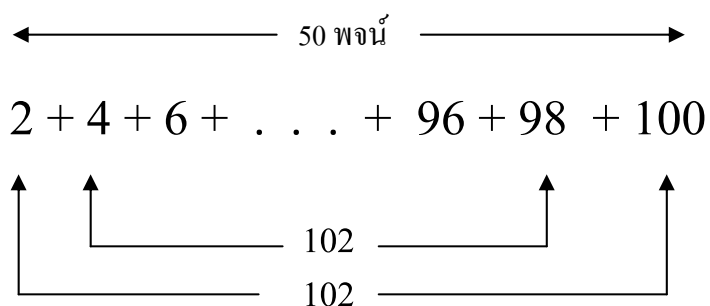
แนวคิดที่ 2

$$\begin{aligned} 2 + 4 + 6 + \dots + 486 &= 2 (1 + 2 + 3 + \dots + 243) \\ &= 2 \times \frac{243}{2} \times (1 + 243) \end{aligned}$$

การหาผลบวกของจำนวนคู่

1. ในกรณีที่ผลบวกเริ่มจาก 2

เช่น



$$\begin{aligned} \text{ได้ผลบวก } \frac{50}{2} \text{ คู่ๆ ละ } 102 &= \frac{50}{2} \times 102 \\ &= \frac{50}{2} \times (2 + 100) \\ &= 50 \times \frac{(2+100)}{2} \\ &= \frac{100}{2} \times \frac{(2+100)}{2} \\ &= \frac{100}{4} \times (2+100) \end{aligned}$$

$$\text{ผลบวกของจำนวนคู่} = \frac{\text{พจน์สุดท้าย}}{4} \times (\text{พจน์แรก} + \text{พจน์สุดท้าย})$$

2. ในกรณีที่ผลบวกเริ่มจากจำนวนคู่จำนวนใดก็ได้

เช่น $122 + 124 + 126 + \dots + 876$

แนวคิด

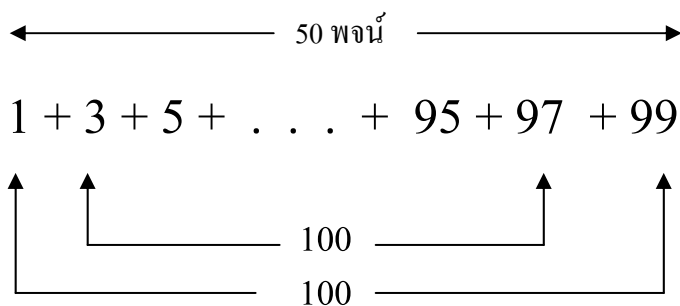
$$\begin{aligned}
 2 + 4 + 6 + \dots + 122 + 124 + \dots + 876 &= \frac{876}{4} \times (2 + 876) \\
 2 + 4 + 6 + \dots + 120 &= \frac{120}{4} \times (2 + 120)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \therefore 122 + 124 + 126 + \dots + 876 &= \frac{876}{4} \times (2 + 876) - \frac{120}{4} \times (2 + 120) \\
 &= 219 \times 878 - 30 \times 122 \\
 &= 192282 - 3660 \\
 &= 188622
 \end{aligned}$$

การหาผลบวกของจำนวนคี่

1. ในกรณีที่ผลบวกเริ่มจาก 1

เช่น



$$\begin{aligned}
 \text{ได้ผลบวก } \frac{50}{2} \text{ คู่ละ } 100 &= \frac{50}{2} \times 100 \\
 &= \frac{50}{2} \times (1 + 99) \\
 &= 50 \times \frac{(1+99)}{2} \\
 &= \frac{100}{2} \times \frac{(1+99)}{2} \\
 &= \frac{100}{4} \times (1+99)
 \end{aligned}$$

$$\text{ผลบวกของจำนวนี่} = \frac{(\text{พจน์สุดท้าย} + 1)}{4} \times (\text{พจน์แรก} + \text{พจน์สุดท้าย})$$

$$\text{ตัวอย่าง } 1 + 3 + 5 + \dots + 793 = \frac{(793+1)}{4} \times (1+793) \text{ (สูตรโดยตรง)}$$

$$\text{หรือ } 1 + 3 + 5 + \dots + 793 = \frac{347}{2} \times (1+793) \text{ (สูตรของเกาส์)}$$

2. ในกรณีที่ผลบวกเริ่มจากจำนวนกี่จำนวนก็ได้

$$\text{เช่น } 113 + 115 + 117 + \dots + 233$$

แนวคิด

$$1 + 3 + 5 + \dots + 113 + 114 + \dots + 233 = \frac{(233+1)}{4} \times (1+233)$$

$$1 + 3 + 5 + \dots + 111 = \frac{(111+1)}{4} \times (1+111)$$

$$\begin{aligned} \therefore 113 + 115 + 117 + \dots + 233 &= \frac{(233+1)}{4} \times (1+233) - \frac{(111+1)}{4} \times (1+111) \\ &= 13689 - 3136 \\ &= 10553 \end{aligned}$$

แบบฝึกทักษะการคิด

1. จงหาค่าของ $\frac{999+888+777+666+555+444+333+222+111}{37}$
2. $999 - 998 + 997 - 996 + 995 - 994 + \dots - 2 + 1$ มีค่าเท่าใด
3. จำนวนเต็มบวก 2 จำนวนสามารถจับคู่กันได้ก็ต่อเมื่อห.ร.ม.ของ 2 จำนวนนั้นเป็นจำนวนเฉพาะ เช่น
15 และ 25 จับคู่กันได้ เพราะ ห.ร.ม.ของ 15 และ 25 เท่ากับ 5 เป็นจำนวนเฉพาะ ถ้า x เป็น
จำนวนคี่ที่ทำให้ x กับ 112 สามารถจับคู่กันได้ จงหาว่า $9x + 3$ มีค่าเท่าใด
4. ให้ $N = 12345678910111213 \dots 99100$ แล้ว N เป็นจำนวนที่ประกอบด้วยเลขกี่หลัก
5. ผลบวกของเลขโดดทุกตัวของจำนวนใน $10^{2010} - 2010$ มีค่าเท่าใด
6. เลขโดดในตำแหน่งที่ 2011 ของ $0.905 + 0.803$ มีค่าเท่าใด
7. จงหาทศนิยมตำแหน่งที่ 1234 ของ $\frac{1}{9} + \frac{2}{99} + \frac{3}{999}$

บทที่ 5

กระบวนการคิดทางคณิตศาสตร์

คณิตศาสตร์ศาสตร์ เป็นศาสตร์แห่งการคิดและเป็นเครื่องมือสำคัญต่อการพัฒนา
ศักยภาพของสมองในด้านทักษะและกระบวนการคิด ซึ่งประกอบด้วย

1. ทักษะและกระบวนการคิดในการสร้างความคิดรวบยอดหลักการทางคณิตศาสตร์
2. ทักษะและกระบวนการคิดในการคิดคำนวณและการแก้ปัญหา
3. ทักษะและกระบวนการคิดในการให้เหตุผลและการพิสูจน์
4. ทักษะและกระบวนการคิดในการสื่อสารหรือสื่อความหมาย
5. ทักษะและกระบวนการคิด ในการนำความรู้ทางคณิตศาสตร์ไปประยุกต์ใช้เป็น

เครื่องมือ การเรียนรู้ของสาขาวิชาอื่นๆ หรือใช้เป็นเทคนิคในการแก้ปัญหา

สมองเป็นอวัยวะที่มีการเจริญเติบโตและพัฒนาเร็วกว่าอวัยวะอื่นๆ ของร่างกาย
ภายในสมองมีเซลล์ประสาทมากมายประมาณ 1 แสนล้านเซลล์ แต่ละเซลล์จะมีใยประสาทแตก
แขนงยื่นยาวออกมา สันบ้าง ยาวบ้าง เพื่อเชื่อมต่อใยประสาทของเซลล์อื่น จุดเชื่อมต่อของใย
ประสาทเรียกว่า ซินแนปส์ เด็กแรกเกิดไปจนกระทั่งเป็นผู้ใหญ่ จำนวนเซลล์ประสาทจะมีเท่าเดิม
ไม่เปลี่ยนแปลง แต่จะมีการเปลี่ยนแปลง โดยเพิ่มจำนวนจุดเชื่อมต่อระหว่างใยประสาทของแต่ละ
เซลล์เป็นจำนวนมากเด็กแรกเกิดมีจุดเชื่อมต่อระหว่างเซลล์ไม่มาก เมื่อเด็กมีอายุมากขึ้นมีการเรียนรู้
และมีประสบการณ์มากขึ้นจำนวนจุดเชื่อมก็ต่อจะมีมากขึ้นเป็นลำดับ สมองของคนสามารถ
พัฒนาให้เจริญงอกงามมีความสมบูรณ์และแข็งแรงตรงส่วนใดและซีกใดของสมองก็ได้ โดยผ่าน
กระบวนการฝึกฝนและผ่านกิจกรรม ซึ่งเป็นตัวกระตุ้นให้สมองคิดและสั่งการให้ทำงานต่างๆ
เช่น ให้สังเกต ให้คิดคำนวณ ให้คิดวิเคราะห์ ให้ตัดสินใจ ให้เหตุผล ให้แก้ปัญหา ให้
ปฏิบัติงาน ให้เคลื่อนไหว ให้ร้องเพลง ให้เล่นกีฬา เป็นต้น

การเรียนรู้ เป็นกระบวนการซึ่งเกิดขึ้นภายหลังในสมองของบุคคล แต่ละคนเป็นผู้สร้าง
วิธีการเรียนรู้กระบวนการเรียนรู้และสร้างความรู้ความเข้าใจในความคิดรวบยอด หลักการต่างๆ
ของแต่ละศาสตร์ได้จากการสังเกต การคิดวิเคราะห์ การทดลอง หาเหตุผลและการพิสูจน์จาก
ความสัมพันธ์ระหว่างสิ่งที่พบเห็นกับความรู้พื้นฐานเดิมและ ประสบการณ์เดิมที่มีอยู่ในตัวของแต่ละ
คน การเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์ ควรเน้นที่ทักษะและกระบวนการคิด วิธีการศึกษา ค้นคว้า วิจัย
เพื่อหา องค์ความรู้ทางคณิตศาสตร์และการนำความรู้ทางคณิตศาสตร์ไปประยุกต์ใช้ในการ
แก้ปัญหาในชีวิตจริงผสมผสานกับการเรียนรู้ที่ได้จากการบอกเล่าจากตำรา เน้นการปลูกฝังให้

นักเรียนเกิดความสนใจ เกิดความคิดริเริ่มสร้างสรรค์ใฝ่รู้และเห็นคุณค่าของคณิตศาสตร์ที่ก่อให้เกิดศาสตร์อื่นๆ ตามมา

5.1 การพัฒนาความสามารถในการคิด

การพัฒนาความสามารถในการคิดในการให้เหตุผลและการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ เป็นเป้าหมายหลักในการเรียนคณิตศาสตร์ถึงกระนั้นก็มีนักเรียนเป็น จำนวนมากที่ไม่สามารถบรรลุเป้าหมายนี้ด้วยเหตุผลนานาประการ นับตั้งแต่ หนังสือเรียนไม่เหมาะสมไปจนถึงงานที่ได้รับมอบหมายไม่เกิดประโยชน์ การคิดและการให้เหตุผลในคณิตศาสตร์คืออะไร ครูจะรู้ได้อย่างไรว่านักเรียนได้มีการคิดและให้เหตุผล

กิจกรรมนั้นไม่จัดว่าเป็นการให้เหตุผลและการคิด การให้เหตุผลเกี่ยวกับสถานการณ์ในสถานการณ์หนึ่ง เกิดจากการที่นักเรียนได้กระทำอะไรระหว่างที่เขาทำกิจกรรมนั้น เมื่อใดก็ตามที่นักเรียนกำลังตัดสินใจว่าจะเลือกใช้วิธีไหน จะปรับวิธีการต่างๆอย่างไร หรือจะประสมประสานความรู้ที่มี อยู่แล้วจากประสบการณ์เดิมอย่างไร นั้นหมายความว่าเด็กกำลัง คิดและให้เหตุผล แรกเริ่มที่นักเรียนทำกิจกรรมจะเกี่ยวข้อง กับการให้เหตุผลและการคิด แต่เมื่อได้แก้ปัญหาแบบเดียวกันซ้ำๆ นักเรียนก็มักจะใช้แต่วิธีการนำไปใช้เท่านั้น ระดับ "การคิด" ที่สูงขึ้นกว่านี้เป็นอย่างไร การมองดูอาจ ไม่ใช่ของจริง ท่านจะต้องมองเห็นนักเรียนไม่ใช่มองเห็นครู กระทำการสอน การพูดจาก็อาจไม่ใช่ของจริงแต่ท่านจะต้องได้ยินครู ถามคำถามนักเรียนว่าทำไม อะไรและอย่างไร ซึ่งเป็นคำถามที่ต้อง การคำตอบมากกว่าหนึ่งคำขึ้นไป

การคิดและการให้เหตุผลอย่างคณิตศาสตร์ ในชั้นเรียนคณิตศาสตร์ทั่วสหรัฐอเมริกาเกี่ยวกับจำนวน ลูกก็ี่ครูจะต้องแจกให้นักเรียน 12 คน คนละ 2 ชิ้นต่อวัน ตั้งแต่ วันจันทร์ถึงศุกร์ แทนการบอกวิธีให้นักเรียนคิด ครูจะให้นักเรียนจับคู่แล้วช่วยกันคิดวิธีที่จะแก้โจทย์ปัญหานี้ นักเรียนบางคู่วาดรูปนักเรียน 10 คน ในมือแต่ละข้าง ของทุกคนถือลูกก็ี่ข้างละ 1 ชิ้นในแต่ละวันแล้วเขาก็นับ จำนวนลูกก็ี่ในภาพ นักเรียนอีกคู่หนึ่ง สร้างตารางตั้งแต่วันจันทร์ ถึงศุกร์ ด้านซ้ายเป็นจำนวน 1- 10 หาผลลัพธ์ของแต่ละคอลัมน์ได้ 10 รวม 5 คอลัมน์ได้ 100 บางคู่ใช้เบี้ย แทนลูกก็ี่ บางคู่นับทีละ 10 สำหรับลูกก็ี่จำนวนแรกของ วันแรก อีก 10 ขึ้น ต่อไปเป็นจำนวนที่สองของวันแรก และต่อไปเรื่อย ๆ จนถึง 10 ขึ้นสุดท้าย การสนทนาของพวกเด็ก ๆ จะเกี่ยวกับวิธีจะทำอย่างไรกับข้อมูลที่มีอยู่ และทำอย่างไรจะให้ ได้ ผลลัพธ์ มีเด็กคนหนึ่งเขียนแค่ $56 + 44 = 100$ บนกระดาน ก็ได้รับการร้องขอให้อธิบายว่าลูกก็ี่เกี่ยวข้อง อย่งไรกับ 56 และ 44 นักเรียนเหล่านี้

กำลังคิดและให้ เหตุผลอย่างแน่นนอน นักเรียนที่มีวิธีการที่แตกต่างก็รับ ผิดชอบในการอธิบายวิธีคิดของเขาแก่เพื่อนร่วมชั้นเป็นการสังเกตการณ์สอนที่มีคุณค่ามาก

อีกชั้นเรียนหนึ่งนักเรียนกำลังหาอัตราส่วนของเส้นรอบวงของวงกลมวงหนึ่งกับเส้นผ่านศูนย์กลาง กระบวนการนี้เด็กชายคนหนึ่งได้ใช้กฎการหา พื้นที่วงกลม และได้รับการขอร้องให้อธิบาย คนแรกตอบไม่ถูกเขาตอบว่าถ้าท่านสร้าง สี่เหลี่ยมรูปหนึ่งในวงกลม พื้นที่ของสี่เหลี่ยมรูปนั้นจะ เท่ากับ อีกคนไม่เห็นด้วยเขาสร้างวงกลมบนกระดานจารีศรีมีเขาสร้างรูปสี่เหลี่ยมบนสี่เหลี่ยมของวงกลม แล้วชี้ให้เห็นว่าพื้นที่ของสี่เหลี่ยม คือ "ถ้าพื้นที่ของวงกลมทั้งเส้นคือ $4r^2$ พื้นที่ก็จะมาก เกินไป จำนวนที่ถูกต้องน่าจะเพียงแค่ 3 เท่าของรูปสี่เหลี่ยม เป็นการอธิบายสูตรที่แยบยล อีกตัวอย่างหนึ่งเป็นนักเรียนมัธยมปลายหลังจากผ่าน Advanced Placement Calculus Test เมื่อภาคเรียนก่อน ครูจะตรวจสอบเรื่อง ภาคตัดกรวยที่ยากขึ้นกับเด็กที่เธอสอน ก่อนจะลงมือดำเนินการครูได้ให้ดูภาพยนตร์แสดงถึงแต่ละภาคตัดกรวยจะมีส่วนร่วมของระนาบและรูปกรวย นักเรียนคนหนึ่งก็ถามขึ้นว่า ระเบียบวิธีของส่วนร่วมเกี่ยวข้องกับนิยามของภาคตัดกรวยที่ใช้หา ระยะทางอย่างไร ครูก็ส่งคำถามให้นักเรียนในชั้นให้ช่วยกันคิด เพื่อหาข้อความคาดการณ์ เมื่อสัญญาณหมดเวลาดังขึ้น โดยยังหาข้อยุติไม่ได้ นักเรียนก็ต้องออกจากห้องไปโดยถกเถียงกันไป ระหว่างทางว่ากลวิธีใดจึงจะบังเกิดผล ครูก็ยอมรับว่าตัวเธอเองก็ไม่รู้คำตอบเหมือนกันแต่จะไปค้นคว้าต่อที่บ้าน เห็นได้ชัดว่านักเรียนเหล่านั้นคุ้นเคยกับการเสี่ยง คุ้นเคยกับการให้ผลเฉลย และการอธิบายคำตอบ และคุ้นเคยกับการคิดเกี่ยวกับคณิตศาสตร์ กิจกรรมเหล่านี้ดูเหมือนและรู้สึกว่าเป็นตัวอย่างอันดีสำหรับการคิดและการให้เหตุผลอย่างคณิตศาสตร์

พื้นฐานของมาตรฐานคณิตศาสตร์ไม่ใช่แค่การมองดูหรือความรู้สึกที่เห็นหรือสังเกตได้ในชั้นเรียน หากแต่ต้องเป็นสิ่งที่เกิดขึ้นจริง เด็ก ๆ ที่ยก ตัวอย่างข้างต้นนั้นได้นำเครื่องมือและกระบวนการ ที่ได้เรียนแล้วมาใช้ประโยชน์อย่างมีนัยสำคัญในคณิตศาสตร์ เป็นการสะท้อนผลการสอนของครู ฉะนั้นขณะที่ท่านวางแผนสำหรับบทเรียนในอนาคตก็ควรที่จะพยายามหาทางหลายๆ ทางที่ให้นักเรียนได้มีส่วนเกี่ยวข้อง และไปให้เห็นอกว่าขั้นการใช้ทักษะและกระบวนการพยายามส่งเสริมให้นักเรียนบรรลุถึงเป้าหมายของคำว่ามาตรฐานคือการคิดและการให้เหตุผลอย่างคณิตศาสตร์

5.2 แนวการสอนเพื่อพัฒนาการคิด

แนวที่ 1 การสอนเพื่อพัฒนาการคิดโดยตรงโดยใช้โปรแกรมสื่อสำเร็จรูป หรือ บทเรียน/กิจกรรมสำเร็จรูปสำหรับครูและโรงเรียนที่สนใจจะพัฒนาความสามารถทางการคิดของนักเรียน และสามารถที่จะจัดหาเวลาและบุคคล รวมทั้งมีงบประมาณที่จะดำเนินการได้ ได้มีผู้จัดทำโปรแกรมและสื่อสำเร็จรูป รวมทั้งบทเรียน/กิจกรรมสำเร็จรูปไว้บ้างแล้ว

แนวที่ 2 การสอนเนื้อหาสาระต่างๆ โดยใช้รูปแบบหรือกระบวนการสอนที่เน้นการพัฒนาการคิดที่ได้มีผู้พัฒนาขึ้นการสอนเพื่อพัฒนาการคิดในลักษณะ นี้เป็นการสอนที่มุ่งสอนเนื้อหาสาระต่างๆตามวัตถุประสงค์ของหลักสูตร แต่เพื่อให้การสอนนั้นเป็นการช่วยพัฒนาความสามารถทางการคิดของผู้เรียนไปในตัว ครูสามารถนำรูปแบบการสอนต่างๆ ที่เน้นกระบวนการคิดมาใช้เป็นกระบวนการสอน ซึ่งจะช่วยให้ครูสามารถพัฒนาผู้เรียนได้ทั้งทางด้านเนื้อหาสาระและการคิดไปพร้อม ๆ กัน

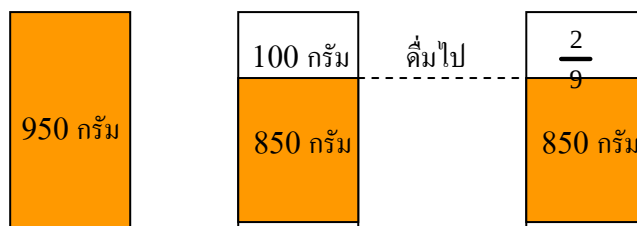
แนวที่ 3 การสอนเนื้อหาสาระ ต่าง ๆ โดยพยายามส่งเสริมให้ผู้เรียนพัฒนา ลักษณะการคิดแบบต่างๆ รวมทั้งทักษะการคิดทั้งทักษะย่อยและทักษะผสมผสานในกิจกรรมการเรียนการสอน

แนวทางทั้ง 3 นี้ น่าจะเป็นแนวทางที่ครูสามารถทำได้มากที่สุดและสะดวกที่สุด เนื่องจากครูสอนเนื้อหาสาระอยู่แล้วและมีกิจกรรมการสอนอยู่แล้ว เมื่อครูมีความเข้าใจเกี่ยวกับการคิด ตามกรอบความคิดที่ได้เสนอมาช้างต้น ครูจะสามารถนำความเข้าใจนั้นมาใช้ในการปรับกิจกรรมการสอนที่มี อยู่แล้วให้มีลักษณะที่ให้โอกาสผู้เรียนได้พัฒนาทักษะการคิด ลักษณะการคิด และกระบวนการคิดที่หลากหลาย

5.3 ตัวอย่างการฝึกทักษะกระบวนการคิด

ปัญหาที่ 1

ซึ่งน้ำหนักขวดที่บรรจุน้ำผลไม้เต็มขวดได้ 950 กรัม ถ้าดื่มไป $\frac{2}{9}$ ของน้ำผลไม้ที่อยู่ในขวด แล้วนำมาชั่งน้ำหนักได้ 850 กรัม จงหาว่าน้ำผลไม้ที่มีในขวดตอนแรกและขวดเปล่าหนักกี่กรัม
แนวคิด



ดื่มน้ำผลไม้ไป $\frac{2}{9}$ ส่วน คิดเป็นน้ำหนัก 100 กรัม

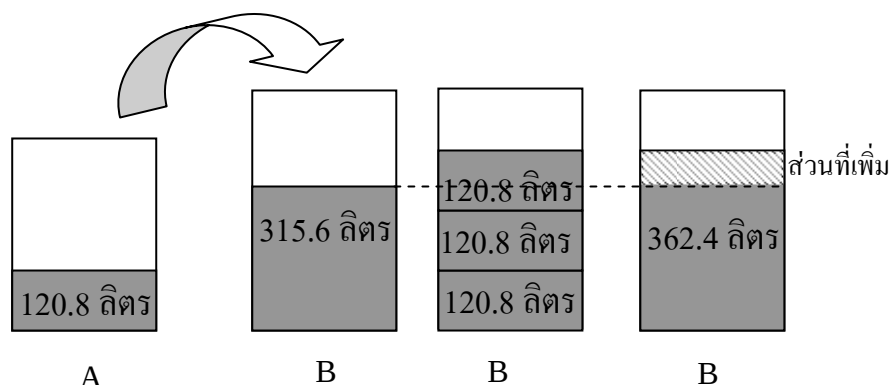
∴ น้ำผลไม้ 1 ส่วนเท่ากับ $\frac{2}{9} \times \frac{9}{2}$ ส่วน คิดเป็นน้ำหนัก $100 \times \frac{9}{2} = 450$ กรัม

มีน้ำผลไม้ 450 กรัม

ขวดเปล่าหนัก $950 - 450 = 500$ กรัม

ปัญหาที่ 2

ถัง A กับ B มีน้ำอยู่ 120.8 ลิตร และ 315.6 ลิตร ตามลำดับ ถ้าเทน้ำจากถัง A ไปถัง B จำนวนหนึ่ง จนน้ำในถัง B เป็น 3 เท่าของน้ำในถัง A จงหาว่าเทน้ำออกจากถัง A ไปถัง B กี่ลิตร



ในถัง B มีน้ำเพิ่มขึ้นอีก $362.8 - 315.6 = 46.8$ ลิตร

นั่นคือ เทน้ำออกจากถัง A ไป 46.8 ลิตร

ปัญหาที่ 3

ถัง A มีน้ำอยู่ 32 ลิตร และถัง B มีน้ำอยู่ 40 ลิตร ถ้าเทน้ำจากถัง B ไปใส่ถัง A ปริมาณหนึ่ง แล้วน้ำในถัง A มีมากกว่าน้ำในถัง B อยู่ 4 ลิตร จงหาว่าเทน้ำออกจากถัง B ใส่ในถัง A กี่ลิตร

แนวคิด	ถัง B	ถัง A	ถัง A มากกว่าถัง B
	40	32	
	39	33	
	38	34	
	37	35	
	36	36	
	35	37	2
	34	38	4

เทน้ำจากถัง B ใส่ในถัง A จำนวน $40 - 34 = 6$ ลิตร

หรือ เทน้ำจากถัง B ใส่ในถัง A = จำนวนที่น้ำในถัง A เพิ่มขึ้น $38 - 32 = 6$ ลิตร

แนวคิดที่ 2

น้ำในถัง B มากกว่าถัง A อยู่ $40 - 32 = 8$ ลิตร

และต้องได้น้ำในถัง A มีมากกว่าน้ำในถัง B อยู่ 4 ลิตร

∴ น้ำที่ใช้เทออกจาก B และใส่เพิ่มให้ A มีรวมทั้งหมด $8 + 4 = 12$ ลิตร

เพราะว่า น้ำที่เทออก เท่ากับ น้ำใส่เพิ่ม

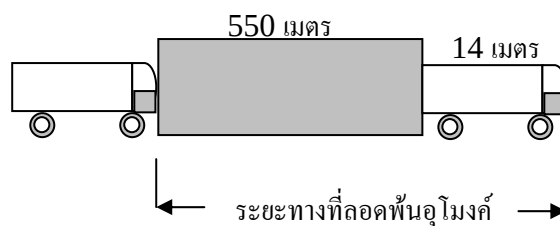
ดังนั้น เทน้ำจากถัง B ใส่ในถัง A จำนวน $\frac{12}{2} = 6$ ลิตร

ปัญหาที่ 4

รถบรรทุกคันหนึ่งมีความยาว 14 เมตร เคลื่อนที่ด้วยความเร็ว 12 เมตร ต่อ วินาที

จงหาว่ารถบรรทุกแล่นลอดพื้นอุโมงค์ที่ยาว 550 เมตร ใช้เวลาที่วินาที

แนวคิด สร้างแผนภาพ จะง่ายในการทำความเข้าใจ



เพราะว่า

ระยะทางที่รถบรรทุกแล่นลอดพื้นอุโมงค์ = ความยาวอุโมงค์ + ความยาวรถบรรทุก

$$= 550 + 14 = 564 \text{ เมตร}$$

∴ รถบรรทุกแล่นลอดพื้นอุโมงค์ใช้เวลา $\frac{564}{12} = 47$ วินาที

ปัญหาที่ 5

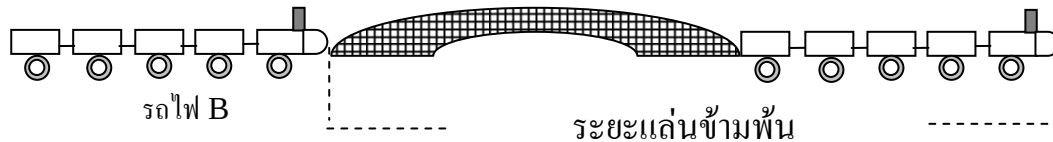
รถไฟ A มีความยาว 100 เมตร เคลื่อนที่ด้วยความเร็ว 26 เมตรต่อวินาที แล่นข้ามพื้นสะพานทางรถไฟแห่งหนึ่งใช้เวลา 1 นาที 20 วินาที ถ้ารถไฟ B ความยาวกว่ารถไฟ A 20 เมตร แล่นข้ามพื้นสะพานด้วยความเร็ว 20 เมตรต่อวินาที จงหาว่ารถไฟ B ใช้เวลาเท่าใด

สร้างแผนภาพ

ความเร็ว 26 เมตรต่อวินาที



ความเร็ว 20 เมตรต่อวินาที



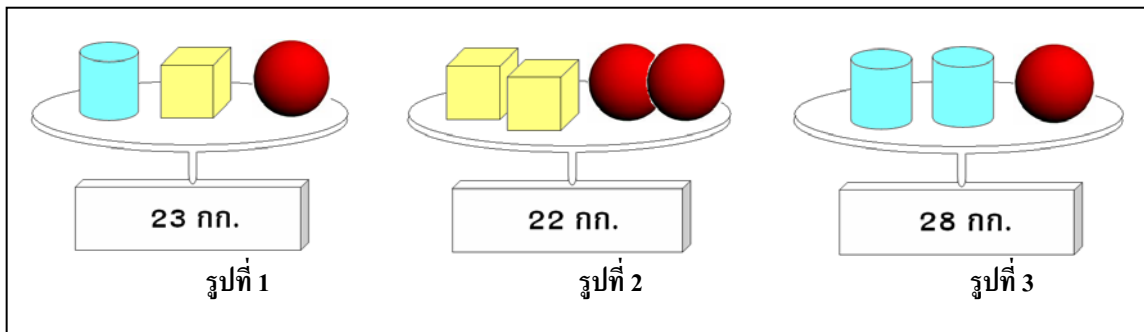
เวลา 1 นาที 20 วินาที รถไฟ A แล่นข้ามพื้นได้ระยะทาง $26 \times 80 = 2080$ เมตร

แต่รถไฟ B ความยาวกว่ารถไฟ A 20 เมตร

รถไฟ B แล่นข้ามพื้นได้ระยะทาง $2080 + 20 = 2100$ เมตร

เพราะฉะนั้น รถไฟ B ใช้เวลาข้ามพื้นสะพาน $\frac{2100}{20} = 105$ วินาที = 1 นาที 45 วินาที

ปัญหาที่ 6



จากรูป จงหาน้ำหนักของทรงกระบอก ทรงสี่เหลี่ยมมุมฉาก และทรงกลม แต่ละรูป

แนวคิดการแก้ปัญหา

จากรูปที่ 2 พบว่าน้ำหนักของ เท่ากับ 22 กิโลกรัม

ดังนั้น จะได้น้ำหนักของ เท่ากับ $22 \div 2 = 11$ กิโลกรัม

จากรูปที่ 1 พบว่าน้ำหนักของ เท่ากับ 23 กิโลกรัม

ดังนั้น จะได้น้ำหนักของ เท่ากับ $23 - 11 = 12$ กิโลกรัม ①

จากรูปที่ 3 พบว่าน้ำหนักของ เท่ากับ 28 กิโลกรัม

ดังนั้น จะได้น้ำหนักของ เท่ากับ $28 - (12 + 12) = 4$ กิโลกรัม ②

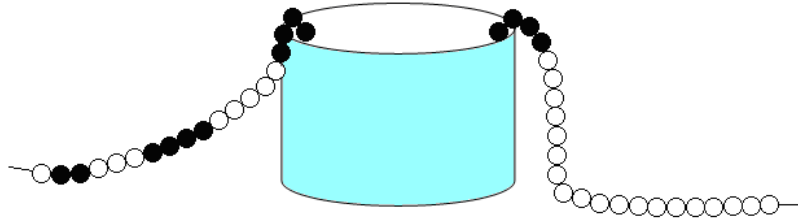
นั่นคือ จะได้น้ำหนักของ เท่ากับ $23 - (12 + 4) = 7$ กิโลกรัม

สรุปได้ว่า น้ำหนักของ เท่ากับ 12 กิโลกรัม

น้ำหนักของ เท่ากับ 7 กิโลกรัม

น้ำหนักของ เท่ากับ 4 กิโลกรัม

ปัญหาที่ 7



จากรูปเป็นการร้อยลูกปัดที่มีลักษณะเป็นทรงกลมสีขาวและสีดำบนเชือกเส้นหนึ่งอย่างมีระบบ โดยมีบางส่วนของเชือกที่ร้อยลูกปัดไม่สามารถมองเห็นได้เพราะอยู่ภายในทรงกระบอก
จงหาสิ่งต่อไปนี้

1. จำนวนลูกปัดทั้งหมดที่ร้อยอยู่บนเชือกเส้นนี้
2. จำนวนลูกปัดทั้งหมดที่มองไม่เห็นที่อยู่ภายในทรงกระบอก และให้บอกด้วยว่าลูกปัดที่มองไม่เห็นดังกล่าวมี สีดำและสีขาวเป็นจำนวนอย่างละกี่เม็ด

แนวคิด จากภาพ

○●●○○○●●●○○○○○○●●●●●●

○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○

พบว่าลูกปัด ○ มี 1 , 3 , 5 , ... , 19

และลูกปัด ● มี 2 , 4 , 6 , ... , 18

จำนวนลูกปัดทั้งหมด $1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 18 + 19 = (9 \text{ คู่ ละ } 19) + 19 = 190$ เม็ด

ลูกปัด ● ที่อยู่ในกล่องมี $(6 - 4) + 8 + 10 + \dots + 16 + (18 - 4)$
 $= 6 + 8 + 10 + 12 + 14 + 16 + 18 - 4 - 4$
 $= 76$ เม็ด

ลูกปัด ○ ที่อยู่ในกล่องมี $7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 = 72$

มีลูกปัดในกล่องทั้งหมด $76 + 72 = 148$ เม็ด

บทที่ 6

การแก้ปัญหาคณิตศาสตร์

6.1 ความสำคัญและความเป็นมาของปัญหา

การศึกษานับเป็นปัจจัยที่สำคัญยิ่งต่อการพัฒนาคุณภาพของคนในประเทศ เพราะรากฐานของชาติ คือ คน รากฐานของคนคือ การศึกษา คนที่มีคุณภาพจะช่วยสร้างความเจริญที่ยั่งยืนในอนาคตได้ การเตรียมคนที่มีคุณภาพเพื่อเป็นผู้นำด้านต่าง ๆ จึงเป็นเรื่องที่สำคัญ ที่จะนำพาชาติให้เจริญก้าวหน้า การปรับโครงสร้างทางการศึกษา การปฏิรูปการศึกษาต้องทำอย่างจริงจังและจริงใจ

ต้องร่วมมือกันเพื่อให้เกิดประโยชน์สูงสุดทางการศึกษา การฝึกฝนคนที่มีสติปัญญาให้ได้เป็นผู้นำในการแก้ปัญหาต่าง ๆ อย่างมีประสิทธิภาพและเป็นผู้ดำเนินการสร้างสรรค์เทคโนโลยีใหม่ๆ อันเป็นกำลังสำคัญในการบริหารและพัฒนาประเทศให้เจริญก้าวหน้า ต้องสร้างคนเก่งหัวกะทิขึ้นมาเพื่อเป็นผู้นำทางวิชาการในอนาคต แม้ว่าเราจะใช้เงินทองสักเท่าไรก็ตาม ถ้าทำได้ดีย่อมมีความคุ้มค่า

เป้าหมายของการจัดการศึกษาตามแผนการศึกษาชาติคือ การพัฒนาคนและคุณภาพของคนให้เป็นผู้ที่มีปัญญารู้จักเหตุและผล รู้จักแก้ปัญหาได้อย่างชาญฉลาด รู้เท่าทันการเปลี่ยนแปลง มีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์ มุ่งพัฒนาพฤติกรรมทางสังคมที่ดีงามทั้งในการทำงานและการอยู่ร่วมกัน

จะเห็นว่า การจัดการศึกษาในปัจจุบันได้ให้ความสำคัญในเรื่องการแก้ปัญหา วัตถุประสงค์ประการหนึ่งในการศึกษาวิชาคณิตศาสตร์คือ ให้ ผู้เรียนได้เรียนรู้วิธีการแก้ปัญหา ฝึกกระบวนการคิด ทำให้ผู้เรียนรู้จักการคิดวิเคราะห์หาเหตุผล ใน Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics (1989) กล่าวว่า การแก้ปัญหาคงจะเป็นจุดเน้นที่สำคัญในหลักสูตรคณิตศาสตร์ เป็นเป้าหมายพื้นฐานในการสอนคณิตศาสตร์ และเป็นอันหนึ่งอันเดียวกับการเรียนคณิตศาสตร์ การ แก้ปัญหาเป็นสิ่งสำคัญ สามารถใช้เป็นเครื่องมือในการเรียนรู้แนวคิดและทักษะต่างๆ ทางคณิตศาสตร์ นอกจากนี้ สมาคมครูคณิตศาสตร์ในสหรัฐอเมริกา(NTCM)ได้กำหนดให้การแก้ปัญหา เป็น 1 ใน 5 มาตรฐานกระบวนการทางคณิตศาสตร์ ใน Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics ปี ค.ศ. 2000

ดังนั้น การเรียนการสอนวิชาคณิตศาสตร์จึงควรเน้นช่วยผู้เรียน ให้ได้รับการฝึกประสบการณ์เพื่อพัฒนาความสามารถในการแก้ปัญหา ซึ่งเป็นทักษะที่สำคัญยิ่งที่จะต้องพัฒนาให้เกิด

ในตัวผู้เรียน เพื่อนำไปใช้ในการดำรงชีวิต ดังที่ โพลยา กล่าวว่า การแก้ปัญหาเป็นพฤติกรรมพื้นฐานของมนุษย์ส่วนใหญ่ที่สุดของความคิดขณะที่มนุษย์ยังมีสติจะเกี่ยวข้องกับปัญหา มนุษย์มีการแก้ปัญหาอยู่ตลอดเวลาเพื่อบรรลุเป้าหมายที่ตั้งไว้ ความเจริญก้าวหน้าของโลกที่เกิดขึ้นก็เกิดจากการรู้จักแก้ปัญหาของมนุษย์ พิชเชอร์ กล่าวว่า ทักษะการแก้ปัญหา เป็นทักษะพื้นฐานสำหรับการดำเนินชีวิตในแต่ละวัน ส่งเสริมความสามารถในระดับต่าง ๆ ที่จะนำไปสู่การประสบความสำเร็จในชีวิต ทักษะการแก้ปัญหานี้จะส่งผลต่อทักษะอื่นๆ ได้แก่ ความคิดสร้างสรรค์ และความคิดวิจารณ์ และส่งเสริมกลยุทธ์ต่าง ๆ ได้แก่ การสังเกต การออกแบบ การตัดสินใจ การระดมสมองทำงานเป็นกลุ่ม และใช้เป็นเครื่องมือหาคำตอบ การแก้ปัญหาเป็นกิจกรรมที่สำคัญในการดำรงชีวิตของมนุษย์ ดังนั้นการแก้ปัญหาก็มีความสำคัญในการจัดการศึกษาของมนุษย์ด้วย

สำหรับประเทศไทย ในระดับประถมศึกษาได้จัดวิชาคณิตศาสตร์อยู่ในกลุ่มทักษะ จากการประเมินคุณภาพการศึกษาของผู้เรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 ปีการศึกษา 2541 โดยสำนักทดสอบทางการศึกษา กรมวิชาการ กระทรวงศึกษาธิการ พบว่าวิชาคณิตศาสตร์(1) มีคะแนนเฉลี่ยของผู้เรียนเท่ากับ 18.6 จากคะแนนเต็ม 40 และวิชาคณิตศาสตร์ (2) มีคะแนนเฉลี่ยของผู้เรียนเท่ากับ 19.6 จากคะแนนเต็ม 40 เช่นกัน นอกจากนี้ในวิชาคณิตศาสตร์(2) ซึ่งวัดการนำความรู้ไปประยุกต์ใช้ในชีวิตประจำวัน การรู้จักคิดอย่างมีเหตุผล การแสดงความคิดออกมาอย่างมีระบบ มีจำนวนผู้เรียนที่ควรปรับปรุงมากกว่าวิชาอื่น ๆ ถึงร้อยละ 16.80 ทั้งนี้สาเหตุอาจมาจากตัวผู้เรียนเอง คือผู้เรียนวิเคราะห์โจทย์ปัญหาไม่ได้ ขาดการคิดอย่างมีเหตุผลและการคิดอย่างมีระบบ และสภาพปัญหาคุณภาพการสอนของผู้สอน คือ ผู้สอนขาดเทคนิคการสอน เทคนิคการสอนไม่ได้เอื้ออำนวยให้เกิดความคิดอย่างมีเหตุผลและมีระบบตามกระบวนการทางคณิตศาสตร์ ขาดการฝึกทักษะให้กับผู้เรียน ผู้สอนไม่ได้ผลิตสื่อที่ตรงตามกระบวนการแก้โจทย์ปัญหา

การพัฒนาความสามารถในการแก้ปัญหานั้น ตามทฤษฎีพัฒนาการทางปัญญา

(Theory of Cognitive Development) ของ พียาเจต์ (Jean Piaget) กล่าวว่า ความสามารถในการแก้ปัญหาก็จะเริ่มพัฒนาการมาตั้งแต่ขั้นที่ 3 คือ Stage of concrete operations เด็กที่มีอายุ 7 - 11 ปี มีความสามารถที่จะอ้างอิงด้วยเหตุผลไม่ขึ้นกับการรับรู้ด้วยรูปร่างเท่านั้น สามารถแบ่งกลุ่มด้วยเกณฑ์หลาย ๆ อย่าง และคิดย้อนกลับได้ สามารถแก้ปัญหามีการดำเนินการที่ยืดหยุ่นได้ แต่ยังเป็นปัญหาที่เป็นรูปธรรมอยู่ ต่อมาถึงระดับการพัฒนาการขั้นที่ 4 คือ Stage of formal operations เด็กมีอายุ 12 - 14 ปี จะมีความสามารถในการหาเหตุผลที่ขึ้นและสามารถคิดแก้ปัญหาคับซับซ้อนได้ เด็กวัยนี้เป็นผู้ที่คิดเหนือไปกว่าปัจจุบัน สนใจที่จะสร้างทฤษฎีเกี่ยวกับทุกสิ่งทุกอย่าง และมีความพอใจที่จะคิดพิจารณาเกี่ยวกับสิ่งที่ไม่มีตัวตน หรือสิ่งที่เป็นนามธรรมชนิดสลับซับซ้อนได้ เนื่องจากเด็ก

ผู้เรียนในระดับประถมศึกษาปีที่ 6 นั้นมีอายุอยู่ในช่วงปลายของขั้นที่ 3 หรืออยู่ในช่วงต้นขั้นที่ 4 ซึ่งตามทฤษฎีพัฒนาการตามสติปัญญาของพียาเจต์ จะเห็นว่า ผู้เรียนในระดับนี้เริ่มมีความสามารถในการแก้ปัญหาแล้ว ดังนั้น ผู้วิจัยจึงเชื่อว่าเด็กในระดับนี้น่าที่จะรับหรือเรียนรู้ ในการฝึกเพื่อพัฒนาทางด้านความสามารถในการแก้ปัญหาได้ และถ้าพวกเขามีความสามารถหรือมีทักษะในการแก้ปัญหาแล้ว จะเป็นประโยชน์ในการศึกษาต่อในระดับมัธยมศึกษาหรือในระดับสูงต่อไป การที่จะฝึกให้ผู้เรียนมีความสามารถในการแก้ปัญหานั้น กิจกรรมการเรียนการสอนและบทบาทของผู้สอน นับว่าสำคัญต่อการที่จะช่วยให้ผู้เรียนมีความสามารถในการแก้ปัญหา ผู้สอนสามารถช่วยให้ผู้เรียนเป็นนักแก้ปัญหาได้ โดยการเลือกปัญหาที่เหมาะสมให้ผู้เรียนทำ ประเมินความเข้าใจและการใช้ยุทธวิธีต่าง ๆ ของผู้เรียนผู้สอนควรมีเครื่องมือหรืออุปกรณ์ที่ช่วยในการสอนการแก้ปัญหา

6.2 ความหมายของปัญหาทางคณิตศาสตร์

ปัญหา เป็นสถานการณ์ที่เราต้องแก้หรือหาทางออกของปัญหา แต่ยังหาสิ่งที่ป็นทางออกหรือ คำตอบของสถานการณ์ไม่ได้เนื่องจากมีอุปสรรคคบบังปัญญารออยู่ ผู้แก้ปัญหา คือ บุคคลที่มีปัญหาและรู้เป้าหมายที่ต้องบรรลุเพื่อแก้ปัญหานั้น ๆ แต่ยังไม่มืเครื่องมือหรือวิธีการใด ๆ อันจะนำไปสู่เป้าหมายนั้น

ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เป็นสถานการณ์หรือคำถามที่ต้องการคำตอบซึ่งบุคคลต้องใช้ สาระความรู้ และประสบการณ์ทางคณิตศาสตร์มากำหนดแนวทางหรือวิธีการในการหาคำตอบ บุคคลผู้หาคำตอบไม่คุ้นเคยกับสถานการณ์นั้นมาก่อน และไม่สามารถหาคำตอบได้ในทันทีทันใด ต้องใช้ทักษะ ความรู้และประสบการณ์หลาย ๆ อย่างประมวลเข้าด้วยกันจึงหาคำตอบได้ สถานการณ์หรือคำถามข้อใดจะเป็นปัญหาหรือไม่ ขึ้นอยู่กับบุคคลผู้แก้ปัญหาและเวลา บาง สถานการณ์อาจเป็นปัญหาสำหรับบางคน แต่อาจไม่เป็นปัญหาสำหรับอีกบุคคลอื่น ๆ ก็ได้ ปัญหาทางคณิตศาสตร์ หมายถึง คำถามหรือสถานการณ์ที่ต้องการคำตอบ โดยที่ผู้ตอบไม่สามารถหาคำตอบได้ในทันที แต่ต้องใช้ความรู้ ประสบการณ์ และทักษะในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์มาประมวลเข้าด้วยกัน เพื่อกำหนดแนวทางหรือวิธีการในการหาคำตอบนั้น ๆ

6.3 ลักษณะของปัญหาคณิตศาสตร์ที่ดี

สิ่งที่สำคัญที่สุดอย่างหนึ่ง ในการจัดกิจกรรมการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ คือ ตัวปัญหาที่จะนำมาให้ผู้เรียนคิดหาคำตอบ

ปัญหาทางคณิตศาสตร์ที่ดีมีลักษณะดังต่อไปนี้

1. ท้าทายความสามารถของผู้เรียน ต้องเป็นปัญหาที่ไม่ยากหรือง่ายเกินไป ถ้าง่ายเกินไป อาจไม่ดึงดูดความสนใจ ไม่ท้าทาย แต่ถ้ายากเกินไป ผู้เรียนอาจท้อถอยก่อนที่จะแก้ปัญหาได้สำเร็จ
2. สถานการณ์ของปัญหาเหมาะกับวัยของผู้เรียน สถานการณ์ของปัญหาควรเป็นเรื่องที่ไม่ห่างไกลเกินไปกว่าที่ผู้เรียนจะทำความเข้าใจปัญหาและรับรู้ได้ และนอกจากนี้ถ้าเป็นสถานการณ์

ที่สามารถเชื่อมโยงกับชีวิตประจำวัน ได้ก็จะดีไม่น้อย

3. แปลกใหม่ ไม่ธรรมดา และผู้เรียนไม่เคยมีประสบการณ์ในการแก้ปัญหานั้นมาก่อน
4. มีวิธีการหาคำตอบได้มากกว่า 1 วิธี เป็นการเปิดโอกาสให้ผู้เรียนได้คิดหาทางเลือกในการหาคำตอบได้หลายวิธี และได้พิจารณาเปรียบเทียบเลือกใช้วิธีที่เหมาะสมที่สุด
5. ใช้ภาษาที่กระชับ รัดกุมถูกต้อง ปัญหาที่ดีไม่ควรทำให้ผู้เรียนต้องมีปัญหากับภาษาที่ใช้ ควรเน้นอยู่ที่ความเป็นปัญหาที่ต้องการหาคำตอบของตัวปัญหามากกว่า

6.4 ปัญหาที่ดีต้องมีสิ่งต่อไปนี้

1. การหาคำตอบของปัญหา ต้องนำไปสู่ความเข้าใจในความคิดรวบยอดทางคณิตศาสตร์ หรือใช้ทักษะทางคณิตศาสตร์
2. ปัญหาจะต้องมีความครอบคลุม หรือเป็นสถานการณ์กว้าง ๆ ที่หลากหลาย
กล่าวโดยสรุปก็คือ ปัญหาที่ดีนั้นควรมีลักษณะเป็นปัญหาที่ท้าทาย เร้าความสนใจต่อผู้เรียน ไม่ยากหรือง่ายเกินไป เหมาะกับระดับของผู้เรียน ภาษาที่ใช้ต้องเข้าใจง่าย มีเงื่อนไขเพียงพอในการหาคำตอบ มีวิธีการที่หลากหลายในการหาคำตอบ นำไปสู่ความเข้าใจ และการใช้ทักษะทางคณิตศาสตร์

6.5 ตัวอย่างการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์

ตัวอย่างที่ 1 ถ้า $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$ และ $x^2 - 43 = y^2$
แล้ว $x \times y$ มีค่าเท่าใด

แนวคิด

เนื่องจาก $x^2 - 43 = y^2$

$$x^2 - y^2 = 43 = 43 \times 1 = (x + y)(x - y)$$

ดังนั้น $x + y = 43$

$$x - y = 1$$

$$x = 22$$

$$y = 21$$

$$\therefore x \times y = 22 \times 21 = 46$$

ตัวอย่างที่ 2 จากตารางที่กำหนดให้ m และ n แต่ละตัวแทนด้วยจำนวนอะไร

จำนวน	คำตอบ
$3^2 - 1^2$	8
$4^2 - 2^2$	
$5^2 - 3^2$	
...	
$m^2 - n^2$	10204

แนวคิด

$$3^2 - 1^2 = 8 = 2 \times 4$$

$$4^2 - 2^2 = 12 = 2 \times 6$$

$$5^2 - 3^2 = 16 = 2 \times 8$$

$$\therefore m^2 - n^2 = 10204 = 2 \times 5102$$

$$(m - n)(m + n) = 2 \times 5102$$

$$m - n = 2$$

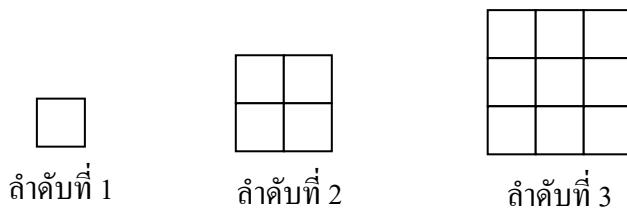
$$m + n = 5102$$

$$2m = 5104$$

$$m = 2552$$

$$n = 2550$$

ตัวอย่างที่ 3 จากภาพเป็นการจัดวางกระเบื้องรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส



กระเบื้องในลำดับที่ 1000 มากกว่ากระเบื้องในลำดับที่ 999 ก็แผ่น

แนวคิด

กระเบื้องในลำดับที่ 1 มี $1 = 1^2$ แผ่น

กระเบื้องในลำดับที่ 2 มี $4 = 2^2$ แผ่น

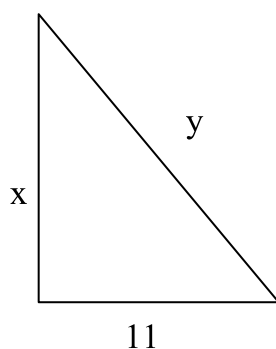
กระเบื้องในลำดับที่ 3 มี $9 = 3^2$ แผ่น

กระเบื้องในลำดับที่ 999 มี 999^2 แผ่น

กระเบื้องในลำดับที่ 1000 มี 1000^2 แผ่น

มีกระเบื้องมากกว่า $1000^2 - 999^2 = (1000 - 999)(1000 + 999)$
 $= 1999$ แผ่น

ตัวอย่างที่ 4 รูปสามเหลี่ยมมุมฉากรูปหนึ่ง มีด้านประกอบมุมฉากด้านหนึ่งยาว 11 หน่วย และความยาวอีกสองด้านเป็นจำนวนเต็มหน่วย
เส้นรอบรูปของสามเหลี่ยมนี้ยาวกี่หน่วย
แนวคิด ให้ด้านของสามเหลี่ยม ยาว $x, y, 11$ หน่วยดังรูป



$$y^2 = x^2 + 11^2$$

$$y^2 - x^2 = 11^2 = 121$$

$$(y - x)(y + x) = 1 \times 121 \quad (11 \times 11 \text{ เป็นไปไม่ได้})$$

$$\text{จึงได้ } y - x = 1$$

$$y + x = 121$$

$$2y = 122$$

$$y = 61$$

$$x = 60$$

เส้นรอบรูปของสามเหลี่ยมเท่ากับ $11 + 61 + 60 = 132$ หน่วย

ตัวอย่างที่ 5 จงหาตัวเลขที่เมื่อลบออกด้วย 45 หรือบวกด้วย 44 แล้ว ผลลัพธ์
ที่ออกมาจะเป็นจำนวนเต็มที่ยกกำลังสอง

แนวคิด

ให้ x เป็นจำนวนที่ต้องการหา

$$\text{จึงได้ } x - 45 = m^2$$

$$\text{และ } x + 44 = n^2$$

$$n^2 - m^2 = 89$$

$$(n - m)(n + m) = 1 \times 89$$

$$n - m = 1$$

$$n + m = 89$$

$$2n = 90$$

$$n = 45$$

$$m = 44$$

$$\therefore x = 44^2 + 45 = 1981$$

ตัวอย่างที่ 6 ให้ $P = \frac{(20102009)^2}{(20102008)^2 + (20102010)^2 - 2}$ จงหา $2010 P$

แนวคิด

$$\frac{(20102009)^2}{(20102008)^2 + (20102010)^2 - 2} = \frac{(20102009)^2}{[(20102008)^2 - 1] + [(20102010)^2 - 1]}$$

$$= \frac{(20102009)^2}{(20102008 + 1)(20102008 - 1) + (20102010 + 1)(20102010 - 1)}$$

$$= \frac{(20102009)^2}{(20102009)(20102007) + (20102011)(20102009)}$$

$$= \frac{20102009}{20102007 + 20102011}$$

$$= \frac{20102009}{40204018}$$

$$P = \frac{1}{2}$$

$$\therefore 2010 P = 2010 \times \frac{1}{2} = 1005$$

แนวคิดที่ 2 ให้ $x = 20102009$

$$x - 1 = 20102008$$

$$x + 1 = 20102010$$

จึงได้

$$\begin{aligned} p &= \frac{x^2}{(x-1)^2 + (x+1)^2 - 2} \\ &= \frac{x^2}{(x^2 - 2x + 1) + (x^2 + 2x + 1) - 2} \\ &= \frac{x^2}{2x^2} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\therefore 2010 P = 2010 \times \frac{1}{2} = 1005$$

ตัวอย่างที่ 7 ถ้า $9x^{\frac{1}{2}} - 6x^{\frac{1}{4}} = -1$ แล้ว $\sqrt{\frac{162x+2}{x}}$ มีค่าเท่าใด

แนวคิด

$$9x^{\frac{1}{2}} - 6x^{\frac{1}{4}} = -1$$

$$9x^{\frac{1}{2}} - 6x^{\frac{1}{4}} + 1 = 0$$

$$(3x^{\frac{1}{4}} - 1)(3x^{\frac{1}{4}} + 1) = 0$$

$$(3x^{\frac{1}{4}} - 1)^2 = 0$$

$$(3x^{\frac{1}{4}} - 1) = 0$$

$$3x^{\frac{1}{4}} = 1$$

$$x^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{3}$$

$$x = \left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1}{81}$$

เพราะฉะนั้น $\sqrt{\frac{162x+2}{x}} = \sqrt{\frac{162 \times \frac{1}{81} + 2}{\frac{1}{81}}} = 18$

ตัวอย่างที่ 8 กำหนด $x^2 + xy + y^2 = 84$ และ $x - \sqrt{xy} + y = 6$
แล้ว xy มีค่าเท่าใด

แนวคิด

$$\text{จาก } x - \sqrt{xy} + y = 6$$

$$x + y = 6 + \sqrt{xy} \quad \dots\dots(1)$$

นำ (1) ยกกำลังสองทั้งสองข้าง

$$x^2 + 2xy + y^2 = 36 + 12\sqrt{xy} + xy$$

$$x^2 + xy + y^2 = 36 + 12\sqrt{xy}$$

$$\text{แต่ } x^2 + xy + y^2 = 84$$

$$\therefore 36 + 12\sqrt{xy} = 84$$

$$12\sqrt{xy} = 48$$

$$\sqrt{xy} = 4$$

$$xy = 16$$

ตัวอย่างที่ 8 ให้ x เป็นจำนวนจริงบวก และ $x + \frac{1}{x} = 2\sqrt{2}$ แล้ว

ค่าของ $\left(x^3 - \frac{1}{x^3}\right)^2$ เป็นเท่าใด

แนวคิด

$$x + \frac{1}{x} = 2\sqrt{2}$$

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^3 = (2\sqrt{2})^3$$

$$x^3 + 3x + 3\frac{1}{x} + \frac{1}{x^3} = 16\sqrt{2}$$

$$\left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) + 3\left(x + \frac{1}{x}\right) = 16\sqrt{2}$$

$$\left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) + 3(2\sqrt{2}) = 16\sqrt{2}$$

$$\left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) = 10\sqrt{2}$$

$$\therefore \left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right)^2 = (10\sqrt{2})^2 = 200$$

$$X^6 + 2x^3 \cdot \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^6} = 200$$

$$X^6 + \frac{1}{x^6} = 198$$

$$\therefore \left(x^3 - \frac{1}{x^3}\right)^2 = X^6 - 2x^3 \cdot \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^6}$$

$$= X^6 + \frac{1}{x^6} - 2$$

$$= 198 - 2$$

$$= 196$$

ตัวอย่างที่ 9 ให้ a, b เป็นจำนวนจริง

ถ้า $a^2 - 2b^2 = 17$ แล้ว $2(2a + 3b)^2 - (3a + 4b)^2$ มีค่าเท่าใด

แนวคิด

$$\begin{aligned} \text{จาก } 2(2a + 3b)^2 - (3a + 4b)^2 &= (2a + 3b)^2 + (2a + 3b)^2 - (3a + 4b)^2 \\ &= (2a + 3b)^2 + [(2a + 3b) - (3a + 4b)][(2a + 3b) + (3a + 4b)] \end{aligned}$$

]

$$\begin{aligned} &= (2a + 3b)^2 + [-a - b][5a + 7b] \\ &= (2a + 3b)^2 - [a + b][5a + 7b] \\ &= (4a^2 + 12ab + 9b^2) - (5a^2 + 12ab + 7b^2) \\ &= -a^2 + 2b^2 \\ &= -(a^2 - 2b^2) \\ &= -17 \end{aligned}$$

บทที่ 7

สื่อการสอน

7.1 สื่อการสอนคืออะไร

สื่อการสอน หมายถึง วัสดุ อุปกรณ์ และวิธีการ ซึ่งถูกนำมาใช้ในการการเรียนการสอน เพื่อเป็นตัวกลางในการนำส่งหรือถ่ายทอดความรู้ ทักษะ และเจตคติ จากผู้สอนหรือแหล่งความรู้ไปยังผู้เรียน ช่วยให้การเรียนการสอนดำเนินไปอย่างสะดวกและมีประสิทธิภาพ และทำให้ผู้เรียนเกิดการเรียนรู้ตามวัตถุประสงค์ของการเรียนการสอนที่ตั้งไว้

ประโยชน์ของสื่อการสอน

1. ช่วยให้คุณภาพการเรียนรู้ดีขึ้น เพราะมีความจริงจังและมีความหมายชัดเจนต่อผู้เรียน
2. ช่วยให้นักเรียนรู้ได้ในปริมาณมากขึ้นในเวลาที่กำหนดไว้จำนวนหนึ่ง
3. ช่วยให้ผู้เรียนสนใจและมีส่วนร่วมอย่างแข็งขันในกระบวนการเรียนการสอน
4. ช่วยให้ผู้เรียนจำ ประทับความรู้สึกรัก และทำอะไรเป็นเร็วขึ้นและดีขึ้น
5. ช่วยส่งเสริมการคิดและการแก้ปัญหาในขบวนการเรียนรู้ของนักเรียน
6. ช่วยให้ผู้สามารถเรียนรู้ในสิ่งที่เรียนได้ลำบากโดยการช่วยแก้ปัญหาหรือข้อจำกัดต่าง ๆ

ได้ดังนี้

- ทำสิ่งที่ซับซ้อนให้ง่ายขึ้น
 - ทำนามธรรมให้มีรูปธรรมขึ้น
 - ทำสิ่งที่เคลื่อนไหวเร็วให้ดูช้าลง
 - ทำสิ่งที่ใหญ่มากให้ย่อขนาดลง
 - ทำสิ่งที่เล็กมากให้ขยายขนาดขึ้น
 - นำอดีตมาศึกษาได้
 - นำสิ่งที่อยู่ไกลหรือลึกลับมาศึกษาได้
7. ช่วยให้นักเรียนเรียนสำเร็จง่ายขึ้นและสอบได้มากขึ้น

7.2 ประเภทของสื่อการสอน

โรเบิร์ต อี. ดี. คีฟเฟอร์ แบ่งประเภทการสอน ดังนี้

1. วัสดุที่ไม่ต้องฉาย ได้แก่ รูปภาพ แผนภูมิ กราฟ ของจริง ของตัวอย่าง หุ่นจำลอง แผนที่ กระดาษสาธิต ลูกโลก กระดาน ชอล์ก กระดานนิเทศ กระดานแม่เหล็ก การแสดงบทบาท นิทรรศการ การสาธิต และการทดลอง เป็นต้น
2. วัสดุฉายและเครื่องฉาย ได้แก่ สไลด์ फिल्मสตริป ภาพโปร่งใส ภาพทึบ ภาพยนตร์ และเครื่องฉายต่าง ๆ เช่น เครื่องฉายภาพยนตร์ เครื่องฉายสไลด์ และฟิล์มสตริป เครื่องฉายกระจก ภาพ เครื่องฉายภาพข้ามศีรษะ เครื่องฉายภาพทึบแสง เครื่องฉายภาพจุลทรรศน์ เป็นต้น
3. โสตวัสดุและเครื่องมือ ได้แก่ แผ่นเสียง เครื่องเล่นจานเสียง เทป เครื่องบันทึกเสียง เครื่องขยายเสียง และวิทยุ เป็นต้น

การออกแบบสื่อการสอน

การออกแบบสื่อการสอนการออกแบบสื่อการสอนการออกแบบสื่อการสอน คือ การวางแผน สร้างสรรค์สื่อการสอนหรือการปรับปรุงสื่อการสอนให้มีประสิทธิภาพและมีสภาพที่ดี โดยอาศัย หลักการทางศิลปะ รู้จักเลือกสื่อและวิธีการทำ เพื่อให้สื่อที่มีความสวยงาม มีประโยชน์และมีความเหมาะสมกับสภาพการเรียนการสอน

ลักษณะการออกแบบที่ดี (Characteristics of Good Design)

1. ควรเป็นการออกแบบที่เหมาะสมกับความมุ่งหมายของการนำไปใช้
2. ควรเป็นการออกแบบที่มีลักษณะง่ายต่อการทำความเข้าใจ การนำไปใช้งานและกระบวนการผลิต
3. ควรมีสัดส่วนที่ดีและเหมาะสมตามสภาพการใช้งานของสื่อ
4. ควรมีความกลมกลืนของส่วนประกอบ ตลอดจนสอดคล้องกับสภาพแวดล้อมของการใช้ และการผลิตสื่อชนิดนั้น

หลักการออกแบบสื่อ

1. ในการเรียนการสอนครั้งหนึ่ง ๆ ต้องพิจารณาเลือกเฉพาะพฤติกรรมที่เป็นจุดเด่นของการเรียนการสอนนั้นมาเป็นพื้นฐานของการพิจารณาสื่อ
2. ลักษณะของผู้เรียน ใช้ลักษณะของผู้เรียนในกลุ่มหลัก เป็นพื้นฐานของการพิจารณาสื่อก่อน หากจำเป็นจึงค่อยพิจารณาสื่อเฉพาะสำหรับผู้เรียนในกลุ่มพิเศษต่อไป

3. ลักษณะแวดล้อมของการผลิตสื่อ ได้แก่

3.1 ลักษณะกิจกรรมการเรียนรู้ ซึ่งครูอาจจัดได้หลายรูปแบบ เช่น

- การสอนกลุ่มใหญ่ ในลักษณะของการบรรยาย การสาธิต
- การสอนกลุ่มเล็ก
- การสอนเป็นรายบุคคล

กิจกรรมการเรียนการสอนแต่ละลักษณะย่อมต้องการสื่อต่างประเภท ต่างขนาด เช่น สื่อประเภท สไลด์ ภาพยนตร์มีความเหมาะสมกับการเรียนในลักษณะกลุ่มใหญ่ วีดีโอ ภาพขนาดกลาง เหมาะกับการสอนกลุ่มเล็ก ส่วนสื่อสำหรับรายบุคคลจะต้องในลักษณะเฉพาะตัวที่จะเปิดโอกาสให้เด็กได้เรียนรู้ และวัดผลด้วยตนเอง

3.2 สิ่งอำนวยความสะดวกในการใช้สื่อ ได้แก่ไฟฟ้าเป็นองค์ประกอบสำคัญการออกแบบสื่อสำหรับโรงเรียน หรือท้องถิ่นที่ไม่มีไฟฟ้าใช้ ย่อมต้องหลีกเลี่ยงสื่อวัสดุฉาย

3.3 วัสดุพื้นบ้าน หรือวัสดุท้องถิ่น นอกจากจะหาใช้ได้ง่ายแล้วยังจะช่วยให้ผู้เรียนได้มองเห็นความสัมพันธ์ของสิ่งที่เรียนรู้กับสภาพจริงในชีวิตประจำวันได้ดีกว่าอีกด้วย ดังนั้นสื่อเพื่อการสอนบรรลุเป้าหมายเดียวกัน อาจจะมีลักษณะแตกต่างกันตามสภาพของวัสดุพื้นบ้าน

4. ลักษณะของสื่อ ในการออกแบบและผลิตสื่อ จำเป็นอย่างยิ่งที่ผู้ผลิตต้องมีความรู้เกี่ยวกับสื่อในเรื่องต่อไปนี้

4.1. ลักษณะเฉพาะตัวของสื่อ สื่อบางชนิดมีความเหมาะสมกับผู้เรียนบางระดับ หรือเหมาะกับจำนวนผู้เรียนที่แตกต่างกัน เช่น แผนภาพจะใช้กับผู้เรียนที่มีพื้นฐานหรือประสบการณ์ในเรื่องนั้น ๆ มาก่อน ภาพการ์ตูนเหมาะสมกับเด็กประถมศึกษา ภาพยนตร์เหมาะสมกับผู้เรียนที่เป็นกลุ่มใหญ่ วิทยุเหมาะกับการสอนมวลชน ฯลฯ

4.2. ขนาดมาตรฐานของสื่อ แม้ว่ายังไม่มีข้อกำหนดเป็นตัวเลขที่แน่นอน แต่ก็ถือเอาขนาดขั้นต่ำที่สามารถมองเห็นได้ชัดเจน และทั่วถึงเป็นเกณฑ์ในการผลิตสื่อ ส่วนสื่อวัสดุฉายจะต้องได้รับการเตรียมต้นฉบับให้พอดีที่จะไม่เกิดปัญหาในขณะฉายทำหรือมองเห็นรายละเอียดภายในชัดเจน เมื่อถ่ายทำขึ้นเป็นสื่อแล้ว การกำหนดขนาดของต้นฉบับให้ถือหลัก 3 ประการ ต่อไปนี้ คือ

- การวาดภาพและการเขียนตัวหนังสือได้สะดวก
- การเก็บรักษาต้นฉบับทำได้สะดวก
- สัดส่วนของความกว้างยาวเป็นไปตามชนิดของวัสดุฉาย

7.3 การใช้สื่อการสอน

1. ใช้สื่อการสอนในขั้นนำเข้าสู่บทเรียน ทั้งนี้เพื่อเร้าผู้เรียนให้เกิดความสนใจ และเปลี่ยนพฤติกรรมในเบื้องต้น โดยปรับตนเองให้พร้อมที่จะเรียนรู้บทเรียนใหม่ ซึ่งอาจกระทำได้ โดยการรื้อฟื้นความรู้เดิม (assimilation) หรือขยายความรู้เดิม (accommodation) เพื่อนำมาใช้ให้ ประสานกันกับความรู้ใหม่ ซึ่งจะเรียนในขั้นต่อไป
2. ใช้สื่อการสอนในขั้นประกอบการสอนหรือขั้นดำเนินกิจกรรมการเรียนการสอน เพื่อช่วยให้ความกระจ่างในเนื้อหาที่เรียนหรือทำให้ผู้เรียน เรียนรู้ได้ง่ายขึ้นและเข้าใจข้อเท็จจริงใน เนื้อหาอย่างแท้จริงในรูปของการเกิด Concept เข้าใจหลักการสำคัญ และมีการเปลี่ยนแปลง พฤติกรรมไปในแนวทางที่ดีขึ้นตามจุดประสงค์เชิงพฤติกรรมที่ได้กำหนดไว้
3. ใช้สื่อการสอนเพื่อขยายขอบเขตความรู้ของผู้เรียนให้กว้างและเจริญงอกงาม ทั้งในด้านความกว้างและความลึกของภูมิปัญญา ซึ่งเป็นผลของการเรียนอย่างแท้จริง
4. ใช้สื่อการสอนเพื่อย่อสรุปเนื้อหาสำคัญของบทเรียนเกิดเป็น Concept ในเนื้อหา แต่ละเรื่องใช้สื่อการสอนเพื่อส่งเสริมผู้เรียนให้มีการฝึกและพัฒนาตนเองให้รู้จักขั้นตอนและมี ความคิดสร้างสรรค์ (Control and Creativity)

7.4 การวัดและการประเมินสื่อการสอน

หลังจากที่เราออกแบบสื่อแล้วแล้วนำมาใช้ในกระบวนการเรียนการสอน ก็ควรมี การวัดผลของสื่อ เป็นการวัดประสิทธิภาพของสื่อ ความคุ้มค่าของสื่อต่อผลสัมฤทธิ์การเรียนรู้ วัด เพื่อปรับปรุงสื่อวัดผลถึงระยะเวลาที่ในการนำเสนอถือว่าพอเหมาะหรือมากเกินไปจนจำ เป็น การ วัดผลสื่อนี้เพื่อผลในการใช้ตัดแปลงปรับปรุงให้ดีขึ้นสำหรับการนำไปใช้ในอนาคต เราสามารถที่ จะนำเอาผลการอภิปรายในชั้นเรียน การสัมภาษณ์ และการสังเกตผู้เรียนมาใช้เป็นแนวทางในการ วัดผลสื่อได้การประเมินการใช้สื่อการสอน

1. ประเมินการวางแผนการใช้สื่อ เพื่อดูว่าสิ่งต่าง ๆ ที่วางไว้สามารถดำเนินไปตาม แผนหรือไม่ หรือเป็นไปเพียงตามหลักการทฤษฎีแต่ไม่สามารถปฏิบัติจริงได้ จึงต้องเก็บรวบรวม ข้อมูลไว้เพื่อการแก้ไขปรับปรุงในการวางแผนครั้งต่อไป
2. ประเมินกระบวนการการใช้สื่อ เพื่อดูว่าการใช้สื่อในแต่ละขั้นตอนประสบปัญหา หรืออุปสรรคอย่างไรบ้าง มีสาเหตุมาจากอะไร และมีการเตรียมการป้องกันไว้หรือไม่
3. ประเมินผลที่ได้จากการใช้สื่อ เป็นผลที่เกิดขึ้นกับผู้เรียนโดยตรงว่า เมื่อเรียนแล้ว

ผู้เรียนสามารถบรรลุตามวัตถุประสงค์เชิงพฤติกรรมที่ตั้งไว้หรือไม่ และผลที่ได้นั้นเป็นไปตามเกณฑ์หรือต่ำกว่าเกณฑ์

7.5 ตัวอย่างสื่อการสอน

จัตุรัสกล (Magic Squares) ที่ไม่หลงกล

15		35
50		
25		

จัตุรัส 1

	16	18
		20

จัตุรัส 2

จัตุรัสที่กำหนดให้ เป็นสี่เหลี่ยมจัตุรัสขนาด 3×3 ประกอบด้วยจัตุรัสเล็ก ๆ อยู่ 9 รูป ภายใต้งี๋เงื่อนไข ผลบวกของ 3 จำนวนในแต่ละแถว แต่ละหลักและแต่ละแนวทแยงมุมมีค่าเท่ากัน เรียกจัตุรัสนี้ว่า จัตุรัสกล 3×3 และยังมีจัตุรัสขนาด 4×4 หรือ 5×5 โดยใช้เงื่อนไขเดียวกัน แต่ในที่นี้จะนำเสนอจัตุรัสกล 3×3 ก่อน

จัตุรัสที่ 1 และ 2 ที่ปรากฏอยู่ด้านบนนั้นให้หาจำนวนมาใส่ในช่องว่างที่เหลือ โดยให้ผลบวก ของ 3 จำนวนในแต่ละแถว แต่ละหลักและแต่ละแนวทแยงมุมมีค่าเท่ากัน จัตุรัสที่ 1 หาจำนวนมาใส่ได้ง่ายกว่าจัตุรัสที่ 2 เพราะทราบผลรวมของ 3 จำนวนในหลักที่ 1 ($15 + 50 + 25$) แล้วซึ่งมีค่าเท่ากับผลบวกในแถวที่ 1 คือ $15 + \square + 35$ ขณะเดียวกันผลบวกในแนวทแยงมุม $25 + \square + 35$ เท่ากับ $15 + 50 + 25$ ก็จะได้คำตอบในช่องที่ยังว่างอยู่ในจัตุรัสที่ 1 ซึ่งง่ายและคนทั่วไปก็ตอบได้ แต่ปัญหาของจัตุรัสที่ 2 ยากกว่า เพราะไม่ทราบว่าผลรวม 3 จำนวนในแต่ละแถว แต่ละหลักมีค่าเท่าใด ถ้าคิดไปเรื่อย ๆ ก็นานกว่าจะได้คำตอบ คณิตศาสตร์มีข้อดีที่ว่าถ้าระบบนี้เป็นจริงก็จะจริงตลอดกาล ดังนั้นการจะหาจำนวนมาเติมในจัตุรัสที่ 2 ด้วยการลองผิดลองถูกนั้นเสียเวลาเปล่า ๆ และอาจเสียอารมณ์ด้วย เราจึงจำเป็นต้องค้นหาระบบนี้ให้ได้ก่อน ซึ่งก็คือกฎเกณฑ์ต่าง ๆ นั่นเอง วิธีที่จะค้นหาที่ง่ายที่สุดให้พิจารณาจากจัตุรัส 3×3 ที่ทำเสร็จแล้ว มีจำนวนครบทั้ง 9 จำนวน เป็นกรณีศึกษา

4	3	8
9	5	1
2	7	6

จากสูตรที่กำหนดให้พบว่า ผลบวกของ 3 จำนวนในแต่ละแถว แต่ละหลัก และแต่ละแนวทแยงมุมเป็น $15 = 3 \times 5$ นั่นคือ ผลบวกของทุกจำนวนในแต่ละแถว แต่ละหลัก แต่ละแนวทแยงมุม เป็น 3 เท่าของจำนวนที่อยู่ตรงกลาง

(5) และสังเกตได้ว่า

$$\text{ในแถวกลาง} \quad \frac{9 + 1}{2} = 5$$

$$\text{ในหลักกลาง} \quad \frac{3 + 7}{2} = 5$$

$$\text{ในแนวทแยงมุม (ซ้ายไปขวา)} \quad \frac{4 + 6}{2} = 5$$

$$\text{ในแนวทแยงมุม (ขวาไปซ้าย)} \quad \frac{8 + 2}{2} = 5$$

นั่นคือ จำนวนตรงกลาง (5) เท่ากับครึ่งหนึ่งของผลบวก 2 จำนวนในแถวกลาง หรือในหลักกลาง หรือในแนวทแยงมุม

และหากสังเกตให้ดียังพบว่า จำนวนที่อยู่ในแนวทแยงมุมสั้น มี 4 คู่ คือ $(9, 3)$, $(3, 1)$, $(1, 7)$ และ $(7, 9)$ สิ่งที่เกิดขึ้นก็คือ

$$\frac{9 + 3}{2} = 6 \quad \text{เป็นจำนวนที่อยู่ในมุมตรงข้ามของ 9 และ 3}$$

$$\frac{3 + 1}{2} = 2 \quad \text{เป็นจำนวนที่อยู่ในมุมตรงข้ามของ 3 และ 1}$$

$$\frac{1 + 7}{2} = 4 \quad \text{เป็นจำนวนที่อยู่ในมุมตรงข้ามของ 1 และ 7}$$

$$\frac{7 + 9}{2} = 8 \quad \text{เป็นจำนวนที่อยู่ในมุมตรงข้ามของ 7 และ 9}$$

นั่นคือ จำนวนที่อยู่ในแต่ละมุม เท่ากับครึ่งหนึ่งของผลบวกของ 2 จำนวนในแนวทแยงมุมสั้นที่อยู่ตรงข้ามกัน

เพื่อให้เกิดความชัดเจนจึงเขียนเป็นกฎ 3 ข้อของจัตุรัสกล 3×3 จะได้นำไปใช้ในการค้นหาจำนวนที่ไม่ทราบได้สะดวก และจะใช้กฎข้อไหนก่อนหลังก็ขึ้นอยู่กับจำนวนที่กำหนดไว้

กฎข้อที่ 1 ผลบวกของทุกจำนวนในแต่ละแถว แต่ละหลัก แต่ละแนวทแยงมุม เป็น 3 เท่าของ จำนวนตรงกลาง

กฎข้อที่ 2 จำนวนตรงกลางเท่ากับครึ่งหนึ่งของผลบวกของ 2 จำนวนในแถว กลาง หรือ หลักกลาง หรือแนวทแยงมุม (มีสองแนวทแยง)

กฎข้อที่ 3 จำนวนที่อยู่ในแต่ละมุมเท่ากับครึ่งหนึ่งของผลบวกของ 2 จำนวนในแนวทแยงมุมเส้นที่อยู่ตรงข้าม

นำกฎข้อที่ 3 มาหาจำนวนที่เหลือในจัตุรัส 2 และเพื่อให้สะดวกจึงกำหนดอักษร $a, b, \dots, f$

d	16	18
a	c	f
e	b	20

แทนช่องว่างดังกล่าว

$$\begin{aligned} \text{ใช้กฎข้อ 3} \quad \frac{16 + a}{2} &= 20 \\ a &= 24 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{และ} \quad \frac{24 + b}{2} &= 18 \\ b &= 12 \end{aligned}$$

d	16	18
24	c	f
e	12	20

$$\begin{aligned} \text{ใช้กฎข้อ 2} \quad c &= \frac{16 + 12}{2} = 14 \\ \text{และ} \quad 14 &= \frac{f + 24}{2} \\ f &= 4 \end{aligned}$$

d	16	18
24	14	4
e	12	20

$$\begin{aligned} \text{ใช้กฎข้อ 1} \quad d + 16 + 18 &= 3(14) \\ d &= 8 \\ \text{และ} \quad e + 12 + 20 &= 3(14) \\ e &= 4 \end{aligned}$$

8	16	18
24	14	4
10	12	20

ได้จัตุรัสที่สมบูรณ์ และผลบวกของทุกจำนวนในแต่ละแถว แต่ละ
หลัก และแต่ละแนวทแยงมุม เท่ากับ 42

เพื่อฝึกความชำนาญลองหาจำนวนในช่องว่างที่เว้นไว้ จากจัตุรัส 3×3 นี้ โดยใช้กฎทั้ง
3 ข้อมาช่วย

		16
4	14	

ในกรณีที่กำหนด จำนวนมาให้เก้าจำนวน คือ $1, 2, 3, \dots, 9$ แล้วให้นำมาใส่ใน
ช่องว่างเก้าช่องนั้น สามารถใช้หลักการคำนวณทางพีชคณิตมาช่วยได้ดังนี้

ให้ผลบวกแต่ละแถวหรือแต่ละหลักเป็น x (เลือกอย่างใดอย่างหนึ่ง) จะได้ผลบวกทั้ง
สามแถว (คือเก้าช่อง) เป็น $3x$ แต่ $3x$ เป็นผลบวกของจำนวนทั้งเก้าที่กำหนดให้

$$\text{ดังนั้น } 3x = 1 + 2 + 3 + \dots + 9 = 45$$

$$x = 15$$

นั่นคือผลบวกแต่ละแถวหรือแต่ละหลัก หรือแต่ละแนวทแยงมุมมีค่าเท่ากับ 15 และพบว่า
จำนวนแถวที่ผ่านจัตุรัสกลางมี 4 แถว คือ แนวอนแถวที่ 2 แนวตั้งหลักที่ 2 และแนวทแยงมุม
2 แถว มีผลรวมเป็น $4 \times 15 = 60$ แต่จำนวนในจัตุรัสตรงกลางถูกนับไปสี่ครั้ง จึงเกินไป 3 ครั้ง
และผลรวมของจำนวนทั้งหมดเป็น 45 (เก้าช่อง) ดังนั้นจำนวนในจัตุรัสกลางคือ $\frac{60-45}{3} = 5$

	5	

เนื่องจากผลรวมของจำนวนในแต่ละแถว แต่ละหลัก แต่ละแนวทแยงมุมเป็น 15 จึงเหลืออีก 4 คู่ที่มีผลรวมเป็น 10 คือ $(1, 9)$, $(2, 8)$, $(3, 7)$ และ $(4, 6)$ เลือกคู่ใดคู่หนึ่งใส่ในแนวทแยงมุมก่อน โดยใช้กฎข้อ 3 ผลบวกในแนวทแยงมุมสั้นจะเท่ากับจำนวนในมุมตรงข้ามเป็นตัวช่วยก็จะใส่จำนวนที่เหลือดังกล่าวได้ง่ายขึ้น

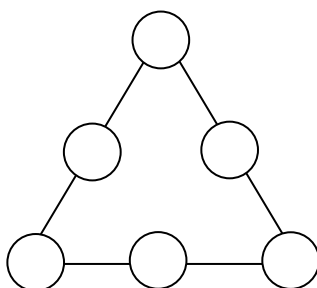
ปมปัญหาสามเหลี่ยมมกล (Magic Triangle)

คณิตศาสตร์มีธรรมชาติของตัวเองเช่นเดียวกับธรรมชาติของสัตว์ที่เลี้ยงลูกด้วยนม ธรรมชาติของป่าเขาลำเนาไพร แต่ธรรมชาติของคณิตศาสตร์มีความแตกต่าง ไม่ใช่เรื่องของพฤติกรรมหรือปรากฏการณ์ที่มองเห็นได้โดยง่าย ซึ่งธรรมชาติของคณิตศาสตร์คือ การเป็นนามธรรม ต้องมีการถอดความแปลความออกมา แล้วค้นพบเป็นกฎเกณฑ์ทางคณิตศาสตร์ นอกจากนี้คณิตศาสตร์ยังมีความเป็นระบบทำให้สามารถคาดคะเนถึงข้อเท็จจริงอันใหม่ให้เกิดขึ้นมาได้อีกเรื่อย ๆ

สามเหลี่ยมมกลเป็นเกมทางคณิตศาสตร์อย่างหนึ่งมีระบบของตัวเอง ผู้ที่เล่นเกมนี้ช่วยให้มีทักษะในกระบวนการคิดวิเคราะห์ ฝึกการใช้ไหวพริบในการวางแผนแก้ปัญหา รวมทั้งเป็นกิจกรรมคณิตศาสตร์พาเพลินได้อีกด้วย ความยากจะเพิ่มขึ้นเมื่อเพิ่มจำนวนในแต่ละด้าน

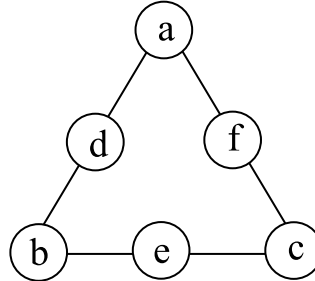
ในเบื้องต้นเป็นการกำหนดให้เติมตัวเลขลงในแผนภาพรูปสามเหลี่ยมที่กำหนดให้ โดยมีเงื่อนไขให้มีผลบวกในแต่ละด้านเท่ากัน ดังนี้

จงเติมตัวเลข 1 – 6 ลงในวงกลมของแผนภาพที่กำหนดให้ โดยผลบวกของทุกจำนวนในแต่ละด้านมีค่าเท่ากัน



เนื่องจากมีคณิตศาสตร์เข้ามาเกี่ยวข้อง ในการเติมตัวเลขลงในวงกลมสามารถใช้หลักการทางคณิตศาสตร์ช่วยในการเติมตัวเลขโดยผ่านขบวนการวิเคราะห์ ดีกว่าการลองถูกลองผิด

แนวทางวิเคราะห์ เพื่อความสะดวกในการคำนวณจึงใช้อักษร a, b, c, d, e, f แทน
จำนวน 1 – 6 และให้ผลบวกของตัวเลขในแต่ละด้านเท่ากับ k ดังภาพ



จากภาพสร้างระบบสมการได้ดังนี้

$$a + d + b = k \quad \dots (1)$$

$$b + e + c = k \quad \dots (2)$$

$$c + f + a = k \quad \dots (3)$$

(1) + (2) + (3) ได้

$$(a + b + c + d + e + f) + (a + b + c) = 3k$$

$$(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) + (a + b + c) = 3k$$

$$21 + (a + b + c) = 3k$$

$$\text{จึงได้} \quad k = \frac{21 + (a + b + c)}{3}$$

$$\text{หรือ } (a + b + c) = 3k - 21$$

$$\text{จาก } k = \frac{21 + (a + b + c)}{3}$$

จะเห็นว่า k มีค่าน้อยที่สุดเมื่อ $a + b + c$ มีค่าน้อยที่สุด

$$\text{ซึ่ง } a + b + c = 6$$

$$\therefore k = \frac{21+6}{3} = 9$$

ในทำนองเดียวกัน

จะเห็นว่า k มีค่ามากที่สุดเมื่อ $a + b + c$ มีค่ามากที่สุด

$$\text{ซึ่ง } a + b + c = 15$$

$$\therefore k = \frac{21+15}{3} = 12$$

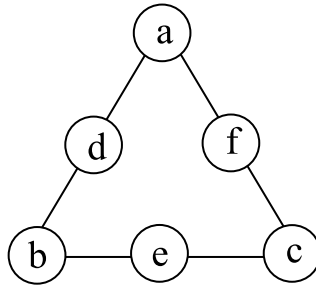
ดังนั้นผลบวกของตัวเลขในแต่ละด้านเท่ากับ 9, 10, 11 และ 12 นำมากำหนดเป็นเงื่อนไข
ได้ 4 กรณี

กรณีที่ 1 ผลบวกของตัวเลขในแต่ละด้านเท่ากับ 9

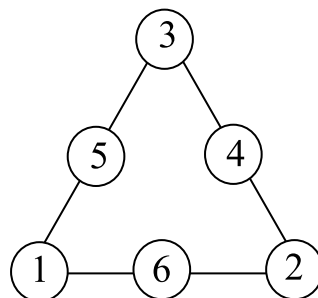
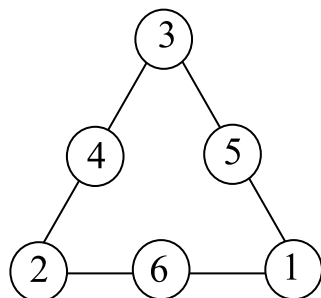
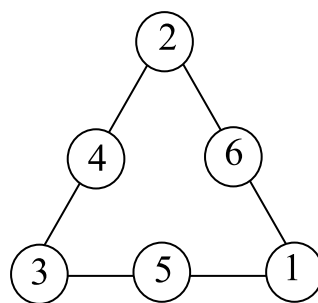
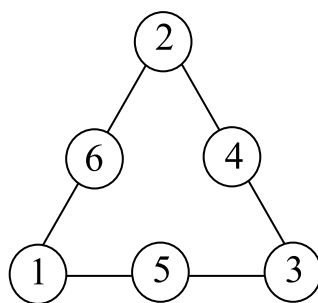
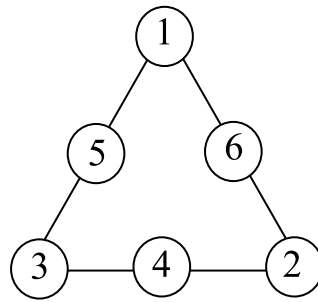
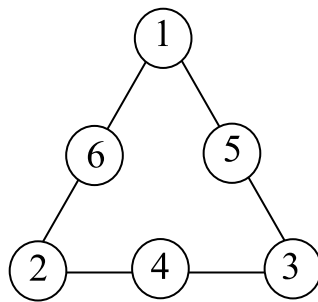
$$\therefore a+b+c = 3 \times 9 - 21 = 6$$

a, b, c จะต้องเป็นตัวเลขใดตัวหนึ่งใน 1, 2, 3 จากตัวเลข 1-6

d, e, f จะต้องเป็นตัวเลขใดตัวหนึ่งใน 4, 5, 6 จากตัวเลขที่เหลือ



นำผลการวิเคราะห์เติมตัวเลขได้ 6 แบบดังนี้



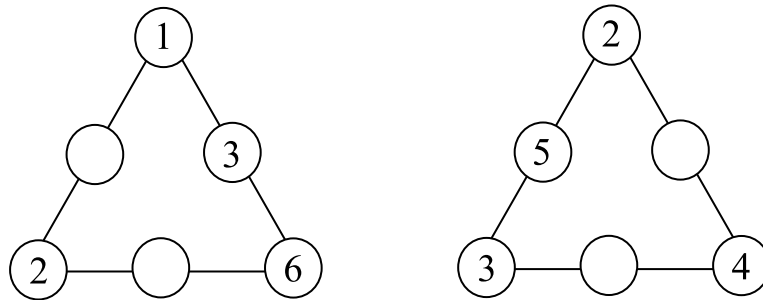
ซึ่งทั้ง 6 แบบ เป็นคำตอบเดียวกัน

กรณีที่ 2 ผลบวกของตัวเลขในแต่ละด้านเท่ากับ 10

$$\therefore a+b+c = 3 \times 10 - 21 = 9$$

a, b, c จะต้องเป็นตัวใดตัวหนึ่งใน 1, 2, 6 หรือ 1, 3, 5 หรือ 2, 3, 4

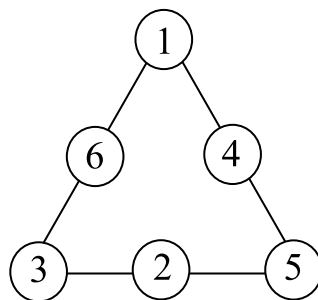
d, e, f จะต้องเป็นตัวใดตัวหนึ่งใน 3, 4, 5 หรือ 2, 4, 6 หรือ 1, 5, 6



เมื่อนำค่า a, b, c ในชุด 1, 2, 6 และ 2, 3, 4 ใส่ตามแผนภาพพบว่า ตัวเลขที่เหลือไม่สามารถใช้ได้

จึงเหลือ a, b, c จะต้องเป็นตัวใดตัวหนึ่งใน 1, 3, 5

และ d, e, f จะต้องเป็นตัวใดตัวหนึ่งใน 2, 4, 6



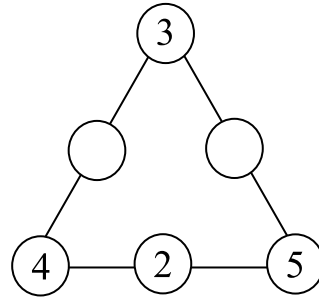
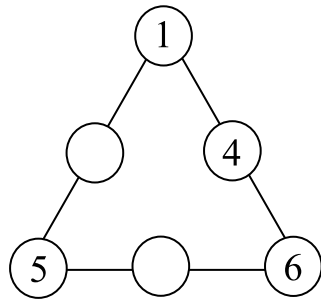
และได้คำตอบที่เป็นจริง

กรณีที่ 3 ผลบวกของตัวเลขในแต่ละด้านเท่ากับ 11

$$\therefore a + b + c = 3 \times 11 - 21 = 12$$

a, b, c จะต้องเป็นตัวใดตัวหนึ่งใน 1, 5, 6 หรือ 2, 4, 6 หรือ 3, 4, 5

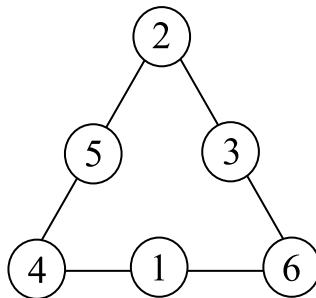
d, e, f จะต้องเป็นตัวใดตัวหนึ่งใน 2, 3, 4 หรือ 1, 3, 5 หรือ 1, 2, 6



เมื่อนำค่า a, b, c ในชุด 1, 5, 6 และ 3, 4, 5 ใส่ตามแผนภาพพบว่า ตัวเลขที่เหลือไม่สามารถใช้ได้

จึงเหลือ a, b, c จะต้องเป็นตัวใดตัวหนึ่งใน 2, 4, 6

และ d, e, f จะต้องเป็นตัวใดตัวหนึ่งใน 1, 3, 5



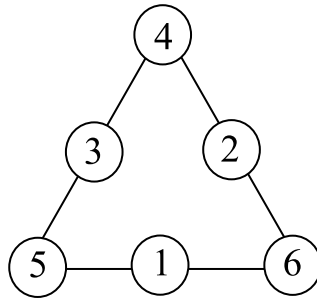
และได้คำตอบที่เป็นจริง

กรณีที่ 4 ผลบวกของตัวเลขในแต่ละด้านเท่ากับ 12

$$\therefore a + b + c = 3 \times 12 - 21 = 15$$

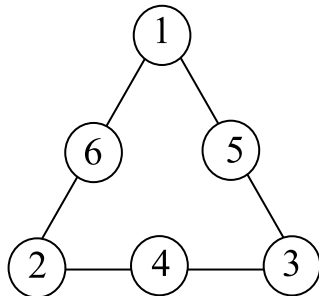
a, b, c จะต้องเป็นตัวใดตัวหนึ่งใน 4, 5, 6

d, e, f จะต้องเป็นตัวใดตัวหนึ่งใน 1, 2, 3

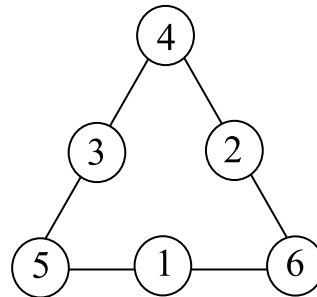


และได้คำตอบที่เป็นจริง

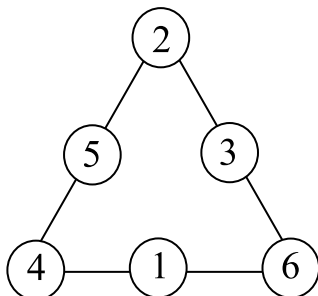
จากผลการวิเคราะห์ห้ปมปัญหาข้างต้น โดยการพิจารณาคำตอบจากแผนภาพทั้ง 4 แบบที่ปรากฏพบว่า



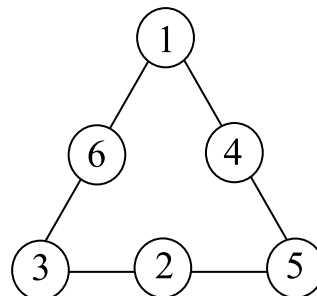
แบบที่ 1



แบบที่ 2



แบบที่ 3

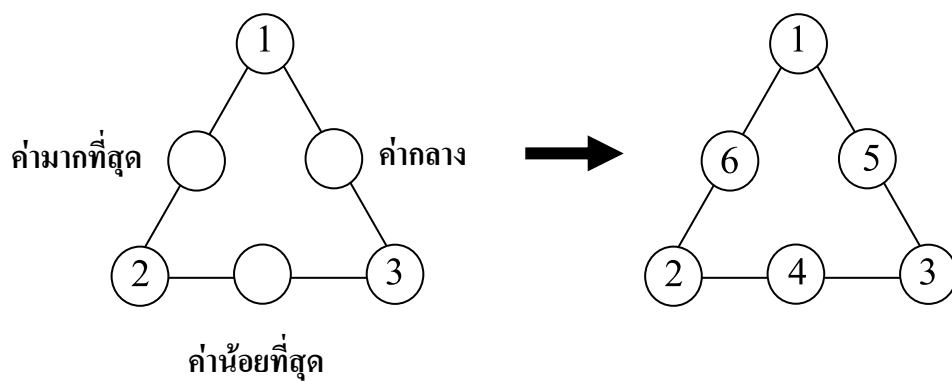


แบบที่ 4

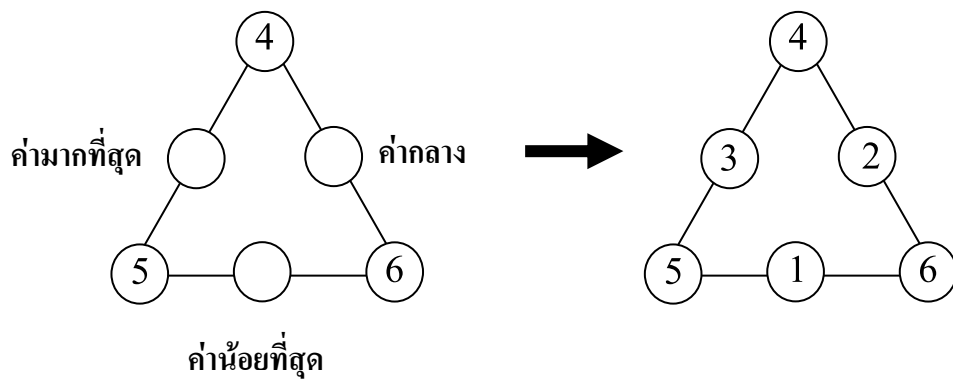
- แบบที่ 1 ผลบวกของจำนวนที่จุดยอดมุมมีค่าน้อยที่สุด
 แบบที่ 2 ผลบวกของจำนวนที่จุดยอดมุมมีค่ามากที่สุด
 แบบที่ 3 จำนวนที่จุดยอดมุมเป็นจำนวนคู่
 แบบที่ 4 จำนวนที่จุดยอดมุมเป็นจำนวนคี่

การเติมจำนวนที่เหลือพิจารณาได้ดังนี้

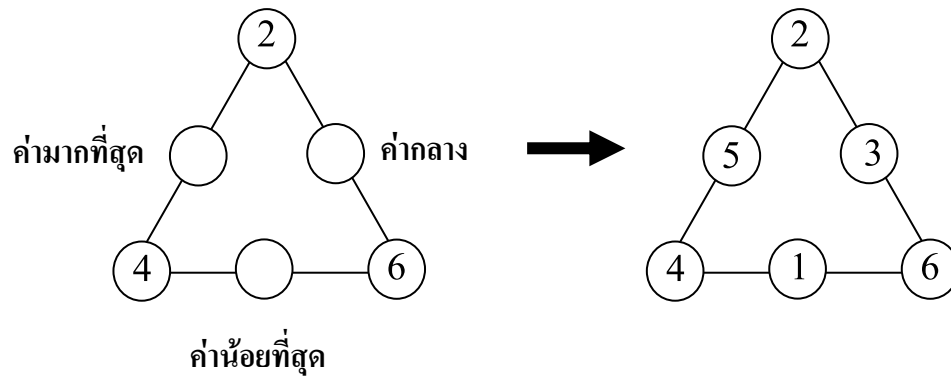
- แบบที่ 1 ผลบวกของจำนวนที่จุดยอดมุมมีค่าน้อยที่สุด



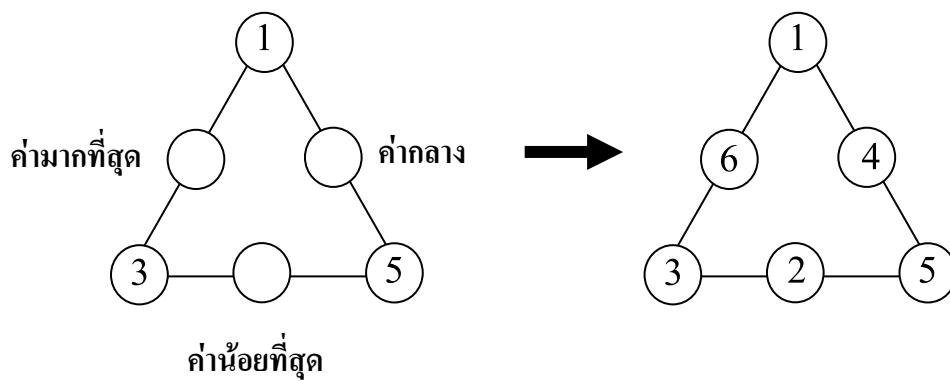
- แบบที่ 2 ผลบวกของจำนวนที่จุดยอดมุมมีค่ามากที่สุด



แบบที่ 3 จำนวนที่จุดยอดมุมเป็นจำนวนคู่



แบบที่ 4 จำนวนที่จุดยอดมุมเป็นจำนวนคี่



ผลสรุปทั้ง 4 รูปแบบที่ได้ จะช่วยให้สามารถเติมตัวเลขได้ง่ายและรวดเร็วยิ่งขึ้น ขณะเดียวกัน
 แนวทางการวิเคราะห์ปัญหานี้ใช้เป็นแนวทางกับรูปแบบอื่นๆ เช่น เพิ่มจำนวนในแต่ละด้าน หรือ
 เป็นการเติมจำนวนในแผนภาพที่เป็นรูปสี่เหลี่ยม ห้าเหลี่ยม เป็นการท้าทายและพัฒนาทักษะการ
 คิดทั้งเด็กและผู้ใหญ่

บทที่ 8

การจัดค่ายคณิตศาสตร์

การจัดค่ายคณิตศาสตร์เป็นกิจกรรมหนึ่งที่มุ่งเน้นให้ผู้เรียน มีความกระตือรือร้นที่จะเรียนคณิตศาสตร์ ทำให้วิชาคณิตศาสตร์ไม่น่าเบื่ออย่างที่คิด กิจกรรมนั้นๆช่วยทำให้ผู้เรียน สนุกสนานไปพร้อมกับได้ความรู้และทักษะทางคณิตศาสตร์ พร้อมกับเห็นประโยชน์ของการนำคณิตศาสตร์ไปใช้ และก่อให้เกิดเจตคติที่ดีต่อคณิตศาสตร์ กิจกรรมต่อไปนี้เป็นเพียงแนวทางในการจัดเท่านั้น ผู้สอนหรือผู้ดำเนินการจัดค่ายคณิตศาสตร์สามารถดัดแปลงไปตามสภาพการณ์ได้ หรือความเหมาะสมอื่นได้

8.1 ค่ายคณิตศาสตร์

ค่ายคณิตศาสตร์เป็นกิจกรรมคณิตศาสตร์ประเภทของการศึกษานอกสถานที่หรือนอกห้องเรียน ที่ผู้สอนจัดให้นักเรียนได้เข้าร่วมกิจกรรม จะพักแรมร่วมกัน 1–2 วันหรือมากกว่าก็ได้แต่โอกาส ส่วนสถานที่ก็เช่นกันแล้วแต่เห็นเหมาะสมพร้อมนั้นมีกิจกรรมเข้าร่วมทางวิชาการ นันทนาการ เพื่อเพิ่มความรู้ทางคณิตศาสตร์ ฝึกด้านทักษะกระบวนการ ประสบการณ์ตรงด้านคณิตศาสตร์ ในสภาพแวดล้อมที่ผู้จัดจัดให้ และส่งเสริมในผู้เข้าค่ายมีความคิดสร้าง

8.1.1 ประเภทของค่ายคณิตศาสตร์

ประเภทที่ 1 ค่ายคณิตศาสตร์แบบ 1 วัน ไม่ค้างคืน (Math Day)

ประเภทที่ 2 ค่ายคณิตศาสตร์แบบ 2 วัน (Math Camp)

ประเภทที่ 3 ค่ายโครงการคณิตศาสตร์ (Math Project Camp)

8.1.2 ประโยชน์ที่นักเรียนจะได้รับจากการเข้าค่ายคณิตศาสตร์

- ได้ทบทวนความรู้เดิมทางคณิตศาสตร์
- ได้เสริมสร้างความรู้ทางคณิตศาสตร์ใหม่
- ได้ฝึกกระบวนการคิดทางคณิตศาสตร์

- ได้ฝึกการแก้ปัญหาที่หลากหลาย
- ได้ฝึกการเสนอความเห็นและรับฟังความคิดเห็นของผู้อื่น
- เสริมสร้างความสามัคคี และฝึกการทำงานร่วมกันเป็นกลุ่ม
- เสริมสร้างระเบียบวินัย และการใช้ชีวิตร่วมกับผู้อื่น
- ได้ฝึกความกล้าแสดงออก
- ฝึกความคิดสร้างสรรค์
- ได้เห็นการประยุกต์ใช้คณิตศาสตร์ในชีวิตจริง

8.1.3 ประโยชน์ที่ได้รับกับนักศึกษาที่จัดค่าย

- ได้ฝึกประสบการณ์วิชาชีพภาคปฏิบัติ
- ฝึกการทำงานร่วมกันเป็นทีม
- ได้รับทุนสำหรับการศึกษาต่อ
- ฝึกการเสียสละเพื่อส่วนรวม

8.1.4 จุดประสงค์ของการเข้าค่ายคณิตศาสตร์

1. เพื่อให้ความรู้ความเข้าใจเกี่ยวกับกระบวนการทางคณิตศาสตร์
2. เพื่อส่งเสริมให้นักเรียนรู้จักคิดและมีความคิดสร้างสรรค์ในทางคณิตศาสตร์
3. เพื่อให้การเรียนการสอนคณิตศาสตร์มีประสิทธิภาพมากที่สุด
4. เพื่อส่งเสริมให้นักเรียนได้มีโอกาส ศึกษา ค้นคว้า และเรียนรู้ธรรมชาติไปด้วย
5. เพื่อส่งเสริมให้นักเรียนมีนิสัยเป็นคนช่างสังเกต ค้นหาข้อมูล เก็บรวบรวมข้อมูล วางแผน และ สรุปสิ่งที่พบเห็นได้ด้วยตนเอง
6. เพื่อนำเอาประสบการณ์ที่ผ่านการเข้าค่ายมาใช้ในการชีวิตประจำวันได้
7. เพื่อให้นักเรียนได้รับประสบการณ์ตรงนอกเหนือจากที่เรียนในห้องเรียน
8. เพื่อฝึกให้นักเรียนได้อยู่ร่วมกัน และรู้จักปรับตัวเข้ากับผู้อื่น และช่วยเหลือผู้อื่นได้
9. เพื่อฝึกให้มีวินัย รู้จักเสียสละ ตรงต่อเวลา ร่วมกับเพื่อนแก้ปัญหา และรู้จักเป็นผู้นำผู้ตามที่ดี

8.1.5 หลักเกณฑ์การจัดค่ายคณิตศาสตร์ควรปฏิบัติดังนี้

1. กำหนดเนื้อหาของการจัดค่ายให้ชัดเจน
2. สอดคล้องกับจุดประสงค์ที่กำหนดไว้ และเป็นการเพิ่มพูนความรู้และประสบการณ์ตรงจากการ เข้าค่ายจริง
3. กิจกรรมที่จัดต้องเน้นด้านคณิตศาสตร์ และเสริมสร้างความรู้ตามหลักสูตรคณิตศาสตร์
4. เน้นกิจกรรมทั้งด้านวิชาการและนันทนาการที่นักเรียนที่นักเรียนได้ร่วมกันเป็นกลุ่ม เพื่อเสริมสร้างความสามัคคีมีมนุษยสัมพันธ์ที่ดี และมีภาวะความเป็นผู้นำและผู้ตามที่ดี
5. ต้องคำนึงถึงความปลอดภัยเป็นหลักในการจัดค่าย อาทิ การเดินทาง ที่พัก กิจกรรมที่จัด
6. ต้องคำนึงถึงความเหมาะสม กิจกรรมที่จัดต้องไม่เป็นการทำลาย ขัดศีลธรรม วัฒนธรรมและวัยของผู้เข้าค่าย
7. ช่วงเวลาที่จัด อาทิ ฤดูหนาว ช่วงเวลาเช่น 1 – 2 วัน หรือ 2 – 3 วัน สถานที่ตั้งค่ายเป็นต้น

8.1.6 กิจกรรมในการจัดค่ายคณิตศาสตร์

1. กิจกรรมวิชาการ

- 1.1 การบรรยายทางวิชาการด้านคณิตศาสตร์ เน้นเชิญวิทยากรที่มีความรู้ทางคณิตศาสตร์ มาบรรยาย
- 1.2 การดูงานสถานที่และโรงเรียนต่าง ๆ
- 1.3 จัดกิจกรรมรวมด้านความคิดสร้างสรรค์ เช่นให้นักเรียนได้สร้างสรรค์ภาพศิลป์จาก รูปเรขาคณิต เป็นต้น

2. กิจกรรมนันทนาการ

- 2.1 การออกกำลังกายด้วย แอโรบิก กิจกรรมเข้าจังหวะอื่นๆ
- 2.2 เล่นเกมต่าง ๆ
- 2.3 การร้องเพลงประกอบทำทางถ้าเป็นไปได้ควรใช้เพลงคณิตศาสตร์
- 2.4 การตอบปัญหาทางคณิตศาสตร์

8.2 ขั้นตอนการจัดค่ายคณิตศาสตร์

1 ขั้นเตรียมการ

- 1.1 เขียนโครงการค่ายคณิตศาสตร์ ตั้งคณะกรรมการฝ่ายต่าง ๆ
- 1.2 เตรียมงานด้านวิชาการ เช่น ตำราและศึกษาสถานที่ต่าง ๆ ที่จะเข้าค่าย
- 1.3 เตรียมงานด้านกิจกรรมด้านนันทนาการ และกิจกรรมประจำวัน
- 1.4 กำหนดเกณฑ์และวิธีการคัดเลือกนักเรียนเข้าค่ายที่เหมาะสม(ในกรณีจัดรวมกลุ่มโรงเรียน หรือระดับเขตการพื้นที่ศึกษา หรือแม้แต่โรงเรียนเดียวแต่นักเรียนมากเกินไปกำลังที่จะจัด)
- 1.5 การประสานงานด้านธุรการต่าง ๆ เช่นพาหนะ ที่พัก อาหาร น้ำดื่ม น้ำใช้ หรือด้านสุขอนามัย เป็นต้น

2. ขั้นตอนการดำเนินงาน

- 2.1 ประชุมคณะกรรมการแต่ละฝ่าย
- 2.2 จัดค่ายตามแผนงานหรือโครงการที่วางไว้
- 2.3 ดำเนินกิจกรรมวิชาการตามขั้นตอนดังนี้
 - 2.3.1 ชี้แจงแนวทางและให้ความรู้ก่อนดำเนินการและกิจกรรมแต่ละกิจกรรม
 - 2.3.2 ดูแลนักเรียนขณะดำเนินกิจกรรมเป็นอย่างดี
 - 2.3.3 นักเรียนผู้เข้าค่ายทุกคนต้องเขียนรายงานและอภิปรายกิจกรรมประจำวันแต่ละวัน

3. การประเมินผล

- 3.1 ทำการประเมินผลประจำวัน เช่นประเมินผลกิจกรรมต่าง ๆ โดยคณะกรรมการค่ายเพื่อ นำไปแก้ปัญหาในวันต่อไป
- 3.2 ทำการประเมินผลเมื่อสิ้นสุดการเข้าค่าย โดยประเมินผลในทุก ๆ ด้าน อาทิ กิจกรรมวิชาการ นันทนาการกิจกรรมเข้าฐาน ธุรการและอื่น ๆ เพื่อปรับปรุงแก้ไขไว้ใช้ในโอกาสต่อไป

8.3 หลักการจัดค่ายคณิตศาสตร์

ข้อตกลงการจัดค่ายคณิตศาสตร์

1. ให้เลือกประธานกรรมการ รองประธาน เลขานุการค่าย และอื่น ๆ ตามที่เห็นว่าควรจะมี
2. ตั้งชื่อกลุ่ม เลือกประธานรองประธาน เลขานุการประจำกลุ่มย่อยแต่ละกลุ่ม(ควรเปลี่ยนประธานทุกวัน)
3. เลือกเพลงประจำกลุ่ม
4. ทุกคนต้องร่วมประจําฐานที่วิทยากรระบุในแต่ละวัน
5. ในแต่ละวันจะต้องรวมทุกกลุ่มใหญ่ที่ห้องประชุมใหญ่อาจจะวันละ 1-3 ชั่วโมง ภาคเช้าและ 1 ชั่วโมงช่วงกลางคืน อีก 2 ชั่วโมงเป็นอย่างน้อย สุดท้ายของภาคกลางคืนคือสวดมนต์และร้อง เพลงสรรเสริญพระบารมี

8.4 Math Camp

Math Camp หมายถึง ค่ายที่จัดกิจกรรมทางคณิตศาสตร์สำหรับนักเรียนเพื่อเสริมศักยภาพทางคณิตศาสตร์ การคิดและการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ การเรียนรู้การนำคณิตศาสตร์ไปใช้ในชีวิตจริงให้กับนักเรียน การอยู่ร่วมกับผู้อื่น การทำงานร่วมกันเป็นกลุ่ม ฝึกความคิดสร้างสรรค์ และความกล้าแสดงออก สามารถจัดได้ทั้งในโรงเรียน หรือนอกสถานที่ก็ได้ ใช้เวลาในการจัด 2-3 วัน อาจมีการค้างคืนหรือไม่ก็ได้

ความสำคัญ

เนื่องด้วยพระราชบัญญัติการศึกษาแห่งชาติ พ.ศ. 2542 ได้กำหนดเกี่ยวกับการจัดการศึกษาในหมวด 4 มาตรา 24 ไว้ว่า จะต้องมีการจัดกิจกรรมให้ผู้เรียนได้เรียนรู้จากประสบการณ์จริง ฝึกการปฏิบัติให้ทำได้ คิดเป็น รักการอ่านและเกิดการใฝ่รู้อย่างต่อเนื่อง

ค่ายคณิตศาสตร์เป็นกิจกรรมการพัฒนาสมองด้านการคิดแก้ปัญหาและการตัดสินใจ สามารถเชื่อมโยงนำความรู้ไปใช้ในชีวิต สอดคล้องกับวัตถุประสงค์ของหลักสูตรในการจัดการศึกษาคณิตศาสตร์ขั้นพื้นฐานในสาระที่ 6 ทักษะ กระบวนการทางคณิตศาสตร์ ประกอบด้วยมาตรฐาน 5 มาตรฐาน ได้แก่ ความสามารถในการแก้ปัญหา ความสามารถในการสื่อสาร การสื่อความหมาย

ทางคณิตศาสตร์และการนำเสนอ ความสามารถในการเชื่อมโยงความรู้ต่างๆ และมีความคิดสร้างสรรค์การให้นักเรียนเข้าค่ายคณิตศาสตร์ทำให้เกิดการเรียนรู้ เกิดทักษะการนำเสนอเพื่อสื่อสารความรู้และความคิด เกิดความคิดสร้างสรรค์ ทำให้นักเรียนได้พัฒนาความสามารถหลายด้าน ทำให้เห็นคุณค่าของวิชาคณิตศาสตร์ต่อวิชาอื่นและต่อการดำรงชีวิต อีกทั้งทำให้เกิดความสัมพันธ์ระหว่างเพื่อนและครู

จุดประสงค์

1. ทบทวนความรู้เดิมทางคณิตศาสตร์
2. ศึกษาความรู้ใหม่ทางคณิตศาสตร์
3. เรียนรู้ตัวอย่างการนำคณิตศาสตร์ไปใช้ในชีวิตจริง
4. ฝึกคิดและการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ที่หลากหลาย
5. ฝึกการทำงานเป็นกลุ่ม

ประโยชน์ที่นักเรียนจะได้รับจากการเข้าค่ายคณิตศาสตร์

1. ได้ทบทวนความรู้เดิมทางคณิตศาสตร์
2. ได้ความรู้ใหม่ทางคณิตศาสตร์
3. ได้ฝึกกระบวนการคิดและการแก้ปัญหามากมาย
4. ได้เห็นตัวอย่างการประยุกต์ใช้คณิตศาสตร์ในชีวิตจริง
5. ได้ฝึกการเสนอความเห็นและรับฟังความคิดเห็นของผู้อื่น
6. เสริมสร้างความสามัคคี และฝึกการทำงานร่วมกันเป็นกลุ่ม
7. เสริมสร้างระเบียบวินัย และการใช้ชีวิตร่วมกับผู้อื่น
8. ได้ฝึกความกล้าแสดงออก
9. ฝึกความคิดสร้างสรรค์

8.5 Math Day

Math Day หมายถึงวันที่จัดกิจกรรมทางคณิตศาสตร์เพื่อเสริมศักยภาพทางคณิตศาสตร์ การคิดและการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ การเรียนรู้การนำคณิตศาสตร์ไปใช้ในชีวิตจริงให้กับนักเรียน อาจจัดในโรงเรียนหรือนอกสถานที่ก็ได้โดยการจัดใช้เวลาในการจัดไม่เกิน 1 วัน

ความสำคัญ

เนื่องด้วยพระราชบัญญัติการศึกษาแห่งชาติ พ.ศ. 2542 ได้กำหนดเกี่ยวกับการจัดการศึกษา ในหมวด 4 มาตรา 24 ไว้ว่า จะต้องมีการจัดกิจกรรมให้ผู้เรียนได้เรียนรู้จากประสบการณ์จริง ฝึกการปฏิบัติให้ทำได้ คิดเป็น รักการอ่านและเกิดการใฝ่รู้อย่างต่อเนื่อง

Math Day เป็นกิจกรรมการพัฒนาสมองด้านการคิดแก้ปัญหาและการตัดสินใจ สามารถเชื่อมโยงนำความรู้ไปใช้ในชีวิต สอดคล้องกับวัตถุประสงค์ของหลักสูตรในการจัดการศึกษาคณิตศาสตร์ขั้นพื้นฐานในสาระที่ 6 ทักษะ กระบวนการทางคณิตศาสตร์ ประกอบด้วยมาตรฐาน 5 มาตรฐานได้แก่ ความสามารถในการแก้ปัญหา ความสามารถในการสื่อสาร การสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์และการนำเสนอ ความสามารถในการเชื่อมโยงความรู้ต่างๆ และมีความคิดสร้างสรรค์ การให้นักเรียนเข้าค่ายคณิตศาสตร์ทำให้เกิดการเรียนรู้ เกิดทักษะการนำเสนอเพื่อสื่อสารความรู้และความคิด เกิดความคิดสร้างสรรค์ ทำให้นักเรียนได้พัฒนาความสามารถหลายด้าน ทำให้เห็นคุณค่าของวิชาคณิตศาสตร์ต่อวิชาอื่นและต่อการดำรงชีวิต อีกทั้งทำให้เกิดความสัมพันธ์ระหว่างเพื่อนและครู

จุดประสงค์

1. ทบทวนความรู้เดิมทางคณิตศาสตร์
2. ศึกษาความรู้ใหม่ทางคณิตศาสตร์
3. เรียนรู้ตัวอย่างการนำคณิตศาสตร์ไปใช้ในชีวิตจริง
4. ฝึกคิดและการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ที่หลากหลาย
5. ฝึกการทำงานเป็นกลุ่ม

ประโยชน์ที่นักเรียนจะได้รับจากกิจกรรม Math Day

1. ได้ทบทวนความรู้เดิมทางคณิตศาสตร์
2. ได้ความรู้ใหม่ทางคณิตศาสตร์
3. ได้ฝึกกระบวนการคิดและการแก้ปัญหาที่หลากหลาย
4. ได้เห็นตัวอย่างการประยุกต์ใช้คณิตศาสตร์ในชีวิตจริง
5. ได้ฝึกการเสนอความเห็นและรับฟังความคิดเห็นของผู้อื่น
6. เสริมสร้างความสามัคคี และฝึกการทำงานร่วมกันเป็นกลุ่ม
7. เสริมสร้างระเบียบวินัย และการใช้ชีวิตร่วมกับผู้อื่น
8. ได้ฝึกความกล้าแสดงออก
9. ฝึกความคิดสร้างสรรค์

8.6 Math Project Camp

Math Project Camp หมายถึง ค่ายฝึกนักเรียนทำโครงการคณิตศาสตร์ที่ช่วยให้นักเรียนได้ฝึกการคิดและแก้ปัญหา และได้เห็นการนำคณิตศาสตร์ไปใช้ในชีวิตจริงจริงสามารถจัดได้ทั้งในโรงเรียน หรือนอกสถานที่ก็ได้ ใช้เวลาในการจัด 2-3 วัน อาจมีการค้างคืนหรือไม่ก็ได้

จุดประสงค์ของการจัด Math Project Camp

1. เพื่อให้นักเรียนได้เรียนรู้ ได้ฝึกทำโครงการคณิตศาสตร์
2. เพื่อให้นักเรียนได้ฝึกกระบวนการคิดทางคณิตศาสตร์และฝึกการแก้ปัญหา
3. เพื่อให้นักเรียนได้ฝึกการนำเสนอผลงานและรับฟังความคิดเห็นของผู้อื่น
4. เพื่อเสริมสร้างความสามัคคี และฝึกการทำงานร่วมกันเป็นกลุ่ม
5. เพื่อเสริมสร้างระเบียบวินัยให้นักเรียน และการใช้ชีวิตร่วมกับผู้อื่น
6. เพื่อให้นักเรียนได้เห็นการประยุกต์ใช้คณิตศาสตร์ในชีวิตจริงๆ

8.6 ตัวอย่างกิจกรรม

รหัสปริศนามหาสนุก

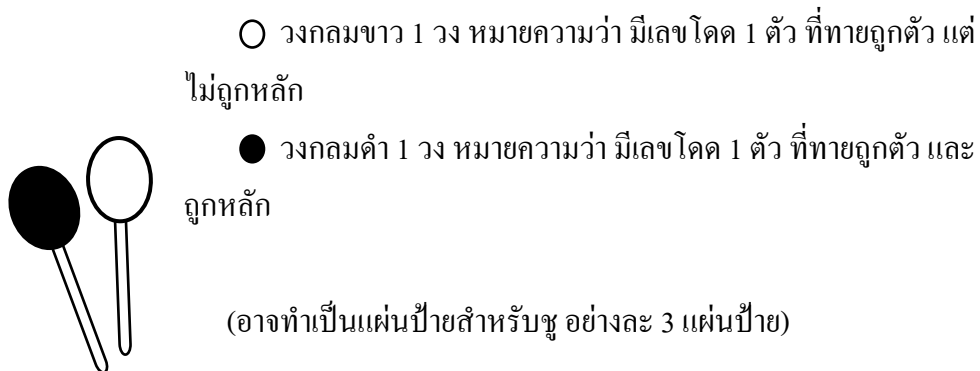
วิธีการจัดกิจกรรม

1.1 แนะนำวิธีการเล่นเกมรหัสปริศนามหาสนุก พร้อมทั้งสาธิตการเล่นเกมรหัสปริศนามหาสนุก แล้วให้นักเรียนทั้งหมดช่วยกันเล่น ตามขั้นตอนดังนี้

1) ชี้แจงการเล่น

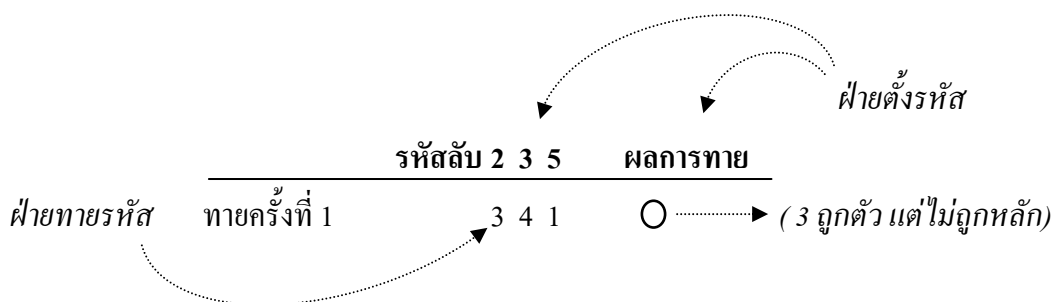
- มีผู้เล่น 2 ฝ่าย คือ ฝ่ายตั้งรหัส และฝ่ายทายรหัส
- รหัสที่ตั้ง ต้องเป็นจำนวนที่มี 3 หลัก โดยที่แต่ละหลักจะเป็นเลขโดดที่ไม่ซ้ำกัน และต้องไม่ให้ฝ่ายทายรหัสรู้ (ควบคุมความยากง่ายโดยการกำหนดจำนวนเลขโดดที่ใช้ในการเล่น)

- ฝ่ายทายรหัส จะทายรหัสครั้งละ 1 รหัส (จำนวนที่มี 3 หลัก) โดยที่การทายรหัสในแต่ละครั้ง ฝ่ายตั้งรหัสจะใช้สัญลักษณ์บอกผลการทาย คือ



- วงกลม 1 วง ใช้แทนเลขโดด 1 ตัว ถ้าทายถูก 2 ตัว ก็ต้องใช้วงกลม 2 วง ถ้าผลการทายรหัส เป็นวงกลมดำ 3 วง แสดงว่า ทายรหัสถูกต้อง

2) วิธยากรสาธิตการเล่น โดยกำหนดเลขโดดที่ใช้ คือ 1 , 2 , 3 , 4 และ 5 ตั้งรหัสเป็นจำนวน ที่มีสามหลัก คือ 235 (เวลาเล่นจริง ต้องไม่ให้ฝ่ายทายรหัสรู้)



บอกผลการทายเสร็จแล้ว ให้ฝ่ายทายรหัสทายครั้งที่ 2

	รหัสลับ 2 3 5	ผลการทาย
ทายครั้งที่ 1	3 4 1	○
ทายครั้งที่ 2	4 2 5	●○ (5 ถูกตัว และถูกหลัก) (2 ถูกตัว แต่ไม่ถูกหลัก)

บอกผลการทายเสร็จแล้ว ให้ฝ่ายทายรหัสทายครั้งที่ 3

	รหัสลับ 2 3 5	ผลการทาย
ทายครั้งที่ 1	3 4 1	○
ทายครั้งที่ 2	4 2 5	●○
ทายครั้งที่ 3	4 5 1	○ (5 ถูกตัว แต่ไม่ถูกหลัก)

บอกผลการทายเสร็จแล้ว ให้ฝ่ายทายรหัสทายครั้งที่ 4

	รหัสลับ 2 3 5	ผลการทาย
ทายครั้งที่ 1	3 4 1	○
ทายครั้งที่ 2	4 2 5	●○
ทายครั้งที่ 3	4 5 1	○ (5, 3 ถูกตัว แต่ไม่ถูกหลัก)
ทายครั้งที่ 4	2 5 3	●○○ (2 ถูกตัว และถูกหลัก)

บอกผลการทายเสร็จแล้ว ให้ฝ่ายทายรหัสทายครั้งที่ 5

	รหัสลับ 2 3 5	ผลการทาย
ทายครั้งที่ 1	3 4 1	○
ทายครั้งที่ 2	4 2 5	●○
ทายครั้งที่ 3	4 5 1	○

ทายครั้งที่ 4 2 5 3 ●○○○
 ทายครั้งที่ 5 2 3 5 ●●●● (ทายรหัสถูกต้อง)

ครั้งที่	รหัสลับ	ผลการทาย
1	3 4 1	○
2	4 2 5	●○
3	4 5 1	○
4	2 5 3	●○○○
5	2 3 5	●●●●

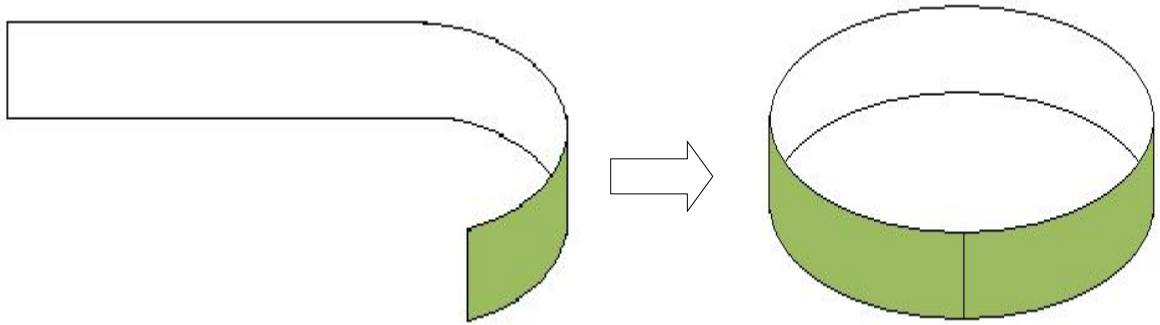
การให้คะแนน: ทายรหัสได้ถูกต้อง ไม่เกิน 5 ครั้ง ได้คะแนนเต็ม 20 คะแนน ถ้าใช้จำนวนครั้งมากกว่า 5 ครั้ง ให้ลดคะแนนลงครั้งละ 2 คะแนน ไปเรื่อยๆ จนกว่าจะทายรหัสได้ถูกต้อง เช่น

- ทายรหัสได้ถูกต้อง โดยทาย 6 ครั้ง จะได้ 18 คะแนน
- ทายรหัสได้ถูกต้อง โดยทาย 7 ครั้ง จะได้ 16 คะแนน
- ทายรหัสได้ถูกต้อง โดยทาย 8 ครั้ง จะได้ 14 คะแนน
- ทายรหัสได้ถูกต้อง โดยทาย 9 ครั้ง จะได้ 12 คะแนน ไปเรื่อยๆ

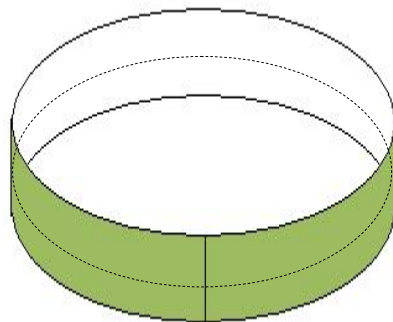
แถบเมอปิอุส

วิธีการจัดกิจกรรม

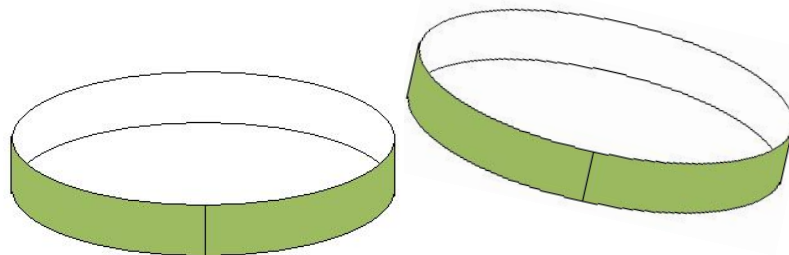
ถ้านำแถบกระดาษเส้นหนึ่งมาม้วนตามแนวความยาว แล้วใช้กาวติดกระดาษให้เป็นวง ดังรูป



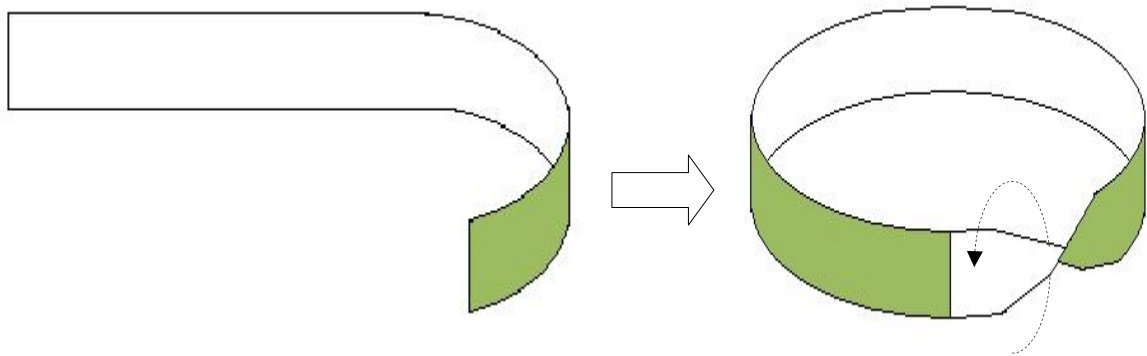
แล้วใช้กรรไกรตัดแบ่งครึ่งตลอดวง ดังรูป (ตัดตามแนวเส้นประ)



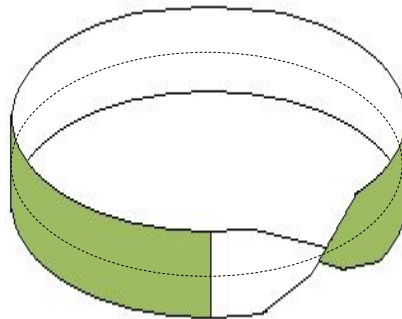
ให้นักเรียนช่วยกันบอกผลที่จะได้ (ได้กระดาษ 2 วง ขนาดเท่ากัน)



2.2 ถ้านำแถบกระดาษขนาดเท่าเดิมมาม้วนตามแนวความยาว แต่ก่อนที่จะติดกาวให้บิดกระดาษแล้วนำด้านตรงข้ามมาติดกันให้เป็นวง ดังรูป



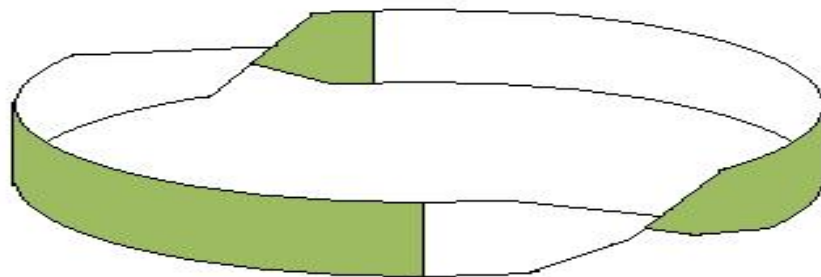
แล้วใช้กรรไกรตัดแบ่งครึ่งตลอดวง ดังรูป (ตัดตามแนวเส้นประ)



ให้แต่ละกลุ่มเลือกคำตอบจากตัวเลือกที่กำหนดให้ พร้อมช่วยกันอภิปรายเหตุผล โดยมีตัวเลือก 3 ข้อ ดังนี้

- 1) แยกออกเป็น 2 วง คล้องกัน
- 2) แยกออกเป็น 2 วง ไม่คล้องกัน
- 3) รวมเป็นวงเดียว

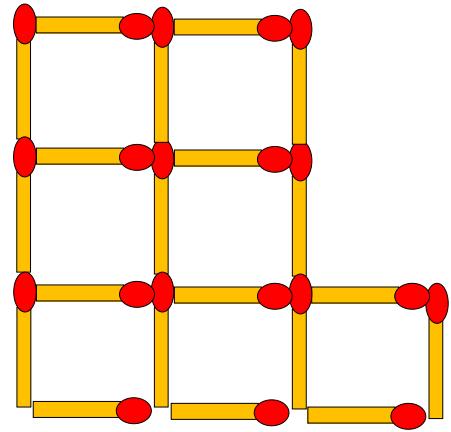
เฉลยคำตอบโดยตัดกระดาษตามเงื่อนไข (คำตอบคือ รวมเป็นวงเดียว)



เกมไม้จีดแปลงร่าง

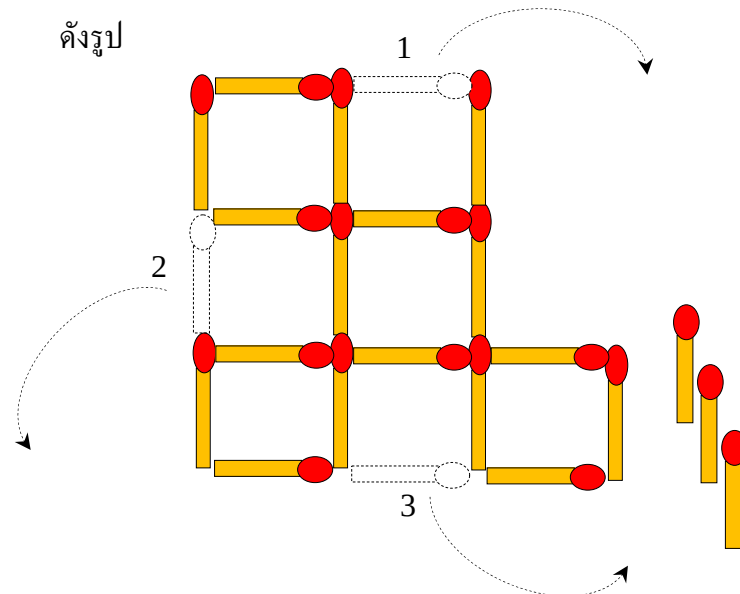
วิธีการจัดกิจกรรม

จากรูป มีไม้จีด 20 ก้าน ต่อเป็นรูป
สี่เหลี่ยมจัตุรัสขนาดเท่ากัน 7 รูป
ถ้าให้ขยับเปลี่ยนตำแหน่งไม้จีด 3 ก้าน
แล้วให้เหลือรูปเรขาคณิต (แบบใดก็ได้) ขนาดเท่ากัน 5 รูป
จะอย่างไร

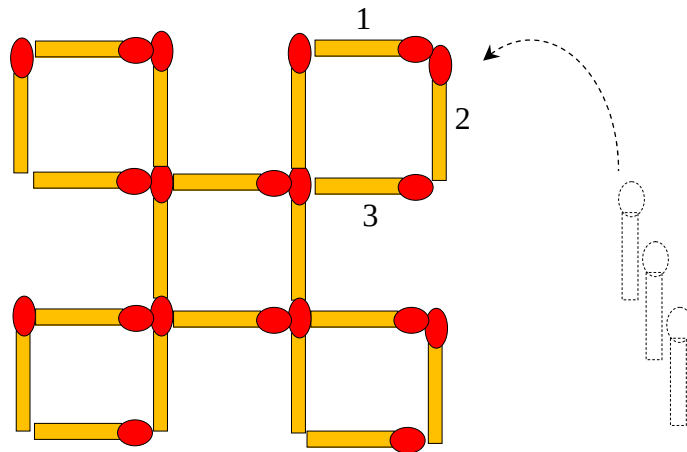


ให้นักเรียนค้นพบคำตอบด้วยตนเอง โดยดำเนินการดังนี้ (อาจใช้ ไม้จีดจริง หรือ

- 1) หยิบไม้จีดออก 3 ก้าน



2) นำไม้ขีดที่หยิบออก 3 ก้านมาวางต่อกันใหม่ดังภาพ ทั้งนี้ต้องชี้ให้นักเรียนสังเกตโครงสร้าง และช่วยกันพิจารณาหาวิธีการจนกว่าจะค้นพบด้วยตนเอง ดังนี้



นับ 15 มหาสนุก

วิธีการจัดกิจกรรม

กติกาการเล่น

- ผู้เล่น 2 คน พลัดกันนับเลขให้ต่อเนื่องกัน ตั้งแต่ 1 ถึง 15
- หลักการนับเลข จะนับทีละ 1 จำนวน หรือ ทีละ 2 จำนวนก็ได้
- ผู้เล่นที่นับ 15 คือ ผู้แพ้

ตัวอย่าง

ผู้เล่นที่	นับเลข
1	1
2	2 3
1	4 5
2	6
1	7 8
2	9 10
1	11
2	12 13
1	14
2	15

ผู้เล่นที่ 1 ชนะ

ผู้เล่นที่ 2 แพ้

ควรให้นักเรียนสังเกตรูปแบบการนับ ร่วมกันพิจารณาว่าถ้าต้องการชนะ จะต้องนับอย่างไร

- ถ้าต้องการชนะต้องนับจำนวนใด ให้ได้ (14)
- ถ้าต้องการนับจำนวน 14 ให้ได้ ต้องนับจำนวนอะไรให้ได้ก่อน
(11 เพราะ ถ้าคู่แข่งนับ 12 เราก็นับ 13 14 แต่ถ้าคู่แข่งนับ 12 13 เราก็นับ 14)
- ถ้าต้องการนับจำนวน 11 ให้ได้ ต้องนับจำนวนอะไรให้ได้ก่อน
(8 เพราะ ถ้าคู่แข่งนับ 9 เราก็นับ 10 11 แต่ถ้าคู่แข่งนับ 9 10 เราก็นับ 11)
- ถ้าต้องการนับจำนวน 8 ให้ได้ ต้องนับจำนวนอะไรให้ได้ก่อน

(5 เพราะ ถ้าคู่แข่งนับ 6 เราก็นับ 7 8 แต่ถ้าคู่แข่งนับ 6 7 เราก็นับ 8)

- ถ้าต้องการนับจำนวน 5 ให้ได้ ต้องนับจำนวนอะไรให้ได้ก่อน

(2 เพราะ ถ้าคู่แข่งนับ 3 เราก็นับ 4 5 แต่ถ้าคู่แข่งนับ 3 4 เราก็นับ 5)

- สรุปแล้ว ถ้าต้องการชนะแน่ ๆ ต้องทำยังไง

1) เลือกเป็นฝ่ายเริ่มนับก่อน

2) เริ่มนับ 2 จำนวน คือ 1 และ 2

3) จากนั้นนับให้ได้จำนวน 5, 8, 11, 14

1 (2) 3 4 (5) 6 7 (8) 9 10 (11) 12 13 (14) 15

กระดาษแผ่นกล

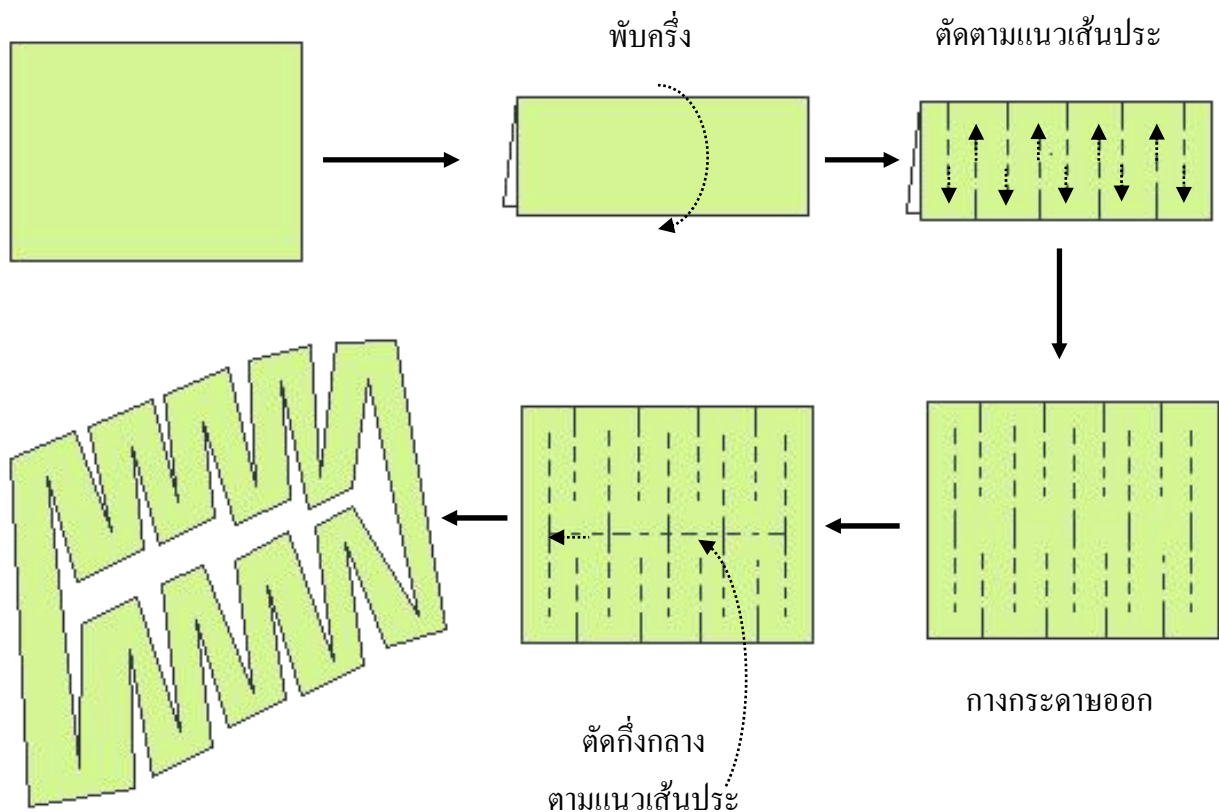
ให้สมาชิกในกลุ่ม ช่วยกันออกแบบการฉีกหรือตัดกระดาษหนังสือพิมพ์ ขนาดกว้าง 13 ซม. ยาว 17 ซม. หรือ 1 ใน 8 ส่วนของหน้ากระดาษหนังสือพิมพ์ ซึ่งเมื่อคลี่ออกแล้ว ต้องให้เป็นวง หรือ กรอบ (กระดาษไม่หลุดออกจากกัน) และต้องสามารถนำมาล้อมจำนวนสมาชิกให้ได้มากที่สุดเท่าที่ จะทำได้ แล้วเขียนอธิบายขั้นตอนการฉีกหรือตัดกระดาษลงในกระดาษที่กำหนดให้

วิธีการจัดกิจกรรม

การให้คะแนน:

1) ความกว้างของวงกระดาษ 10 คะแนน โดยในแต่ละกลุ่มต้องเลือกแบบ การฉีก กระดาษมา 1 แบบ แล้วให้สมาชิกในกลุ่มเข้าไปอยู่ในวงให้ได้มากที่สุด ซึ่งให้คะแนนดังนี้

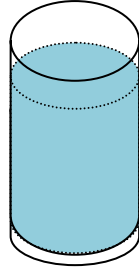
- เข้าได้ 5 คนขึ้นไป 10 คะแนน
- เข้าได้ 4 คน 8 คะแนน
- เข้าได้ 3 คน 6 คะแนน
- เข้าได้ 2 คน 4 คะแนน
- เข้าได้ 1 คน 2 คะแนน
- ทำไม่ได้ 0 คะแนน



แก้วไม่เป็นปัญหา

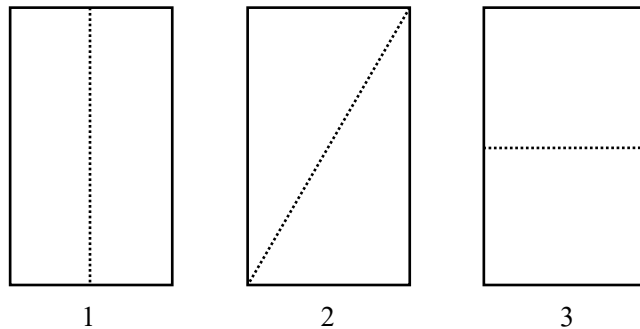
วิธีการจัดกิจกรรม

แก้วน้ำทรงกระบอกใบหนึ่ง มีน้ำเกินครึ่งแต่ไม่เต็มแก้ว ถ้าต้องการน้ำครึ่งแก้วพอดี จะทำอย่างไร



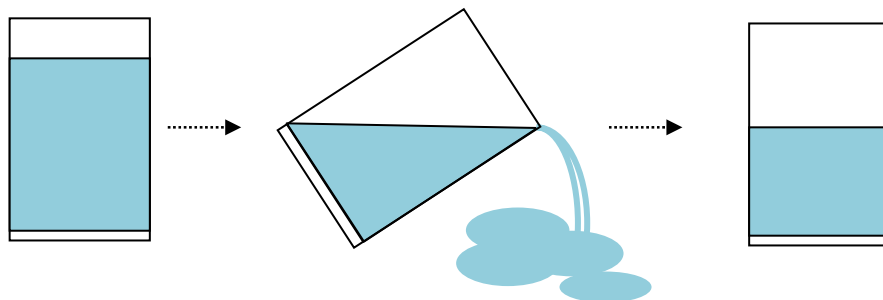
ให้มองแก้วทรงกระบอก เป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า แล้วร่วมกันพิจารณาการแบ่งรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า ออกเป็น 2 ส่วนเท่า ๆ กัน แทนการแบ่งน้ำครึ่งแก้ว ดังนี้

- การแบ่งรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า ออกเป็น 2 ส่วน ทำได้หลายแบบ เช่น



ร่วมกันพิจารณา และร่วมกันสรุปว่าจะใช้ความรู้เรื่องนีมาแบ่งน้ำให้เหลือครึ่งแก้วได้อย่างไร และจะดำเนินการอย่างไร

- จะแบ่งน้ำ ตามแบบที่ 2 โดยจะค่อย ๆ เอียงแก้ว รินน้ำออก จนกว่าระดับน้ำ จะอยู่ในระดับแนวเส้นทแยงมุม แล้วจะเหลือน้ำในแก้วครึ่งหนึ่งพอดี ดังรูป



บทที่ 9

กระบวนการแก้ปัญหา

“ผู้กล้าที่จะสอน จะต้องไม่หยุดยั้งการเรียนรู้”

นับจากอดีตจนถึงปัจจุบันการจัดการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ในระดับมัธยมยังไม่ประสบความสำเร็จเท่าที่ควร เนื่องจากวิชาคณิตศาสตร์มีลักษณะเป็นนามธรรม และเนื้อหาบางตอนก็ยากที่จะอธิบายให้เด็กเข้าใจต้องใช้ความคิดอย่างสมเหตุสมผล จึงจะเรียนรู้และเข้าใจโครงสร้างทางคณิตศาสตร์ได้ ด้วยเหตุนี้ผู้เรียนส่วนใหญ่จึงไม่ชอบเรียนวิชาคณิตศาสตร์ และมีผลการเรียนอยู่ในระดับที่ไม่น่าพอใจ นักเรียนคิดแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ไม่เป็น การเรียนการสอนจึงมีลักษณะเป็นการเลียนแบบ นักเรียนทำแบบฝึกหัดหรือทำการบ้านไม่ได้ นักเรียนไม่สนใจและไม่ตั้งใจเรียน นักเรียนส่วนมากไม่มีทักษะในการคิดคำนวณ และไม่มีทักษะในการคิดแก้ไขปัญหาคณิตศาสตร์

ตัวอย่างประเทศที่แสดงอย่างชัดเจนถึงความสำคัญของการศึกษาคือ ประเทศสิงคโปร์ เหตุผลที่สำคัญยิ่งต่อความสำเร็จของสิงคโปร์คือ ทั้งรัฐบาลและประชาชนเห็นความสำคัญของการศึกษา และทุ่มเทพทรัพยากรเพื่อพัฒนาเด็กและเยาวชนอย่างเต็มที่

หากต้องการเห็นประเทศไทยก้าวหน้ามากกว่านี้และไม่ถูกทิ้งขว้างไว้ข้างหลังเพราะการพัฒนาอย่างไม่หยุดยั้งของโลกปัจจุบัน จึงจำเป็นต้องให้ความสำคัญกับการศึกษาคณิตศาสตร์และวิทยาศาสตร์ของเยาวชนให้มากกว่านี้

น่าเสียดายว่าระบบการศึกษาของไทยกลายเป็นจุดรั้งเด็กเก่ง เพราะโรงเรียนส่วนใหญ่ไม่มีระบบที่ช่วยเอื้อให้นักเรียนได้เรียนรู้อย่างรวดเร็ว สามารถก้าวหน้าอย่างเต็มที่ นี่ก็สาเหตุที่ทำให้เด็กเบื่อโรงเรียน

รัฐบาลสิงคโปร์ให้ครูคณิตศาสตร์แต่ละคนเข้าฝึกอบรมเพื่อพัฒนาความสามารถอย่างน้อยปีละ 100 ชั่วโมง มีการสร้างศูนย์อบรมกลางเพื่อถ่ายทอดความรู้และวิธีการสอนที่ดีแก่ครูอย่างต่อเนื่อง

หลักสูตรของสิงคโปร์มีความเข้มข้น มีการวิจัยค้นคว้าเพื่อปรับปรุงให้ทันสมัยอย่างต่อเนื่อง หลักสูตรของสิงคโปร์เน้นเรื่องการแก้ปัญหาที่ซับซ้อน มีความท้าทายและมุ่งเน้นให้เด็กใช้สติปัญญาอย่างเต็มที่

ที่สิงคโปร์นั้นหลักสูตรถูกพัฒนาจากผู้เชี่ยวชาญทางคณิตศาสตร์ที่ทางกระทรวงศึกษาว่าจ้างมาซึ่งจะไปสัมภาษณ์ครูผู้สอนสม่ำเสมอว่า วิธีการเรียนการสอนแบบใดที่เด็กนักเรียนต้องการที่สุด

นอกจากนั้นวิธีการเรียนรู้ของนักเรียนในตำราที่ใช้ภาพประกอบทำให้สิ่งที่เป็นนามธรรมเกิดภาพเป็นรูปธรรม ทำให้จำได้ง่ายขึ้นด้วย

หนังสือเรียนคณิตศาสตร์ของสิงคโปร์จะให้เด็กนักเรียนเขียนบาร์ชาร์ต และภาพวาดประกอบในการค้นหาคำตอบ ซึ่งเป็นเทคนิคการเรียนรู้ที่เรียกว่า การจำลองภาพ ซึ่งเป็นกลยุทธ์การเรียนรู้แบบหนึ่งที่ใช้กันมาหลายปีแล้ว และช่วยให้เด็กนักเรียนสามารถแก้ปัญหาที่ซับซ้อนได้ง่าย อีกทั้งยังช่วยให้คำนวณผลได้รวดเร็วด้วยการใช้สมอง

การแก้ปัญหาถือเป็นเป้าหมายที่สำคัญของการศึกษาทั้งหมด เด็กเรียนหนังสือเพื่อหาความรู้ แต่ถ้านำความรู้ไปประยุกต์ใช้ในชีวิตหรือแก้ปัญหาใดๆ ไม่ได้เลย ความรู้นั้นก็สูญเปล่า ดังนั้นเด็กจะต้องศึกษาวิธีการนำความรู้นั้นไปใช้แก้ปัญหาค่ะ

คณิตศาสตร์เป็นวิชาที่เหมาะสมกับการเรียนรู้วิธีแก้ปัญหามาก เพราะปัญหาคณิตศาสตร์มีความชัดเจน ไม่คลุมเครือ มีตั้งแต่ระดับง่ายไปจนถึงระดับที่ซับซ้อน มีความหลากหลาย จากนั้นไปเป็นการนำเสนอแนวคิดโดยใช้ Model Method เพื่อพัฒนาผู้เรียน พร้อมยกตัวอย่างให้ครูผู้สอนได้นำไปจัดกิจกรรมการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ให้มีประสิทธิภาพมากยิ่งขึ้น

9.1 Model Method

เป็นการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนตามแนวคิดทฤษฎีการเรียนรู้ของ Bruner ที่เน้นให้นักเรียนได้เห็นหรือสัมผัสกับวัตถุหรือสื่อของจริงก่อน(concrete representation) ต่อจากนั้นใช้ภาพเป็นสื่อ(pictorial representation) แล้วปรับเป็นสื่อนามธรรม(abstract representation) ซึ่งเป็นขั้นตอนทั้งหมดในการพัฒนาความเข้าใจในองค์ความรู้ใหม่ด้วยตนเองที่เป็น visual representation

Model Method เป็นกิจกรรมการจัดการเรียนการสอนในประเทศสิงคโปร์ มี 3 ลักษณะคือ

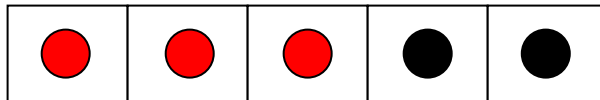
1. Part – Whole Model
2. The Comparison Model
3. The Change Model

9.1.1 Part – Whole Model เป็นการให้นักเรียนได้มองเห็นความสัมพันธ์ระหว่าง ส่วนย่อย(part) ซึ่งอาจมีเพียงสองส่วนย่อยหรือมากกว่าก็ได้ กับส่วนทั้งหมด(whole)

ตัวอย่าง มีลูกบอลสีแดง 3 ลูก สีดำ 2 ลูก มีลูกบอลทั้งหมดเท่าใด

Part – Whole Model มีขั้นตอนตามทฤษฎีการเรียนรู้ของ Bruner ดังนี้

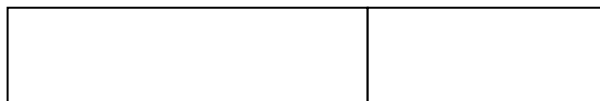
1. Concrete



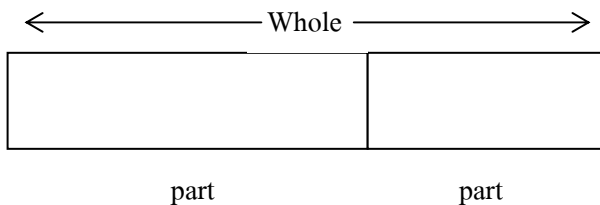
2. Pictorial



3. Abstract

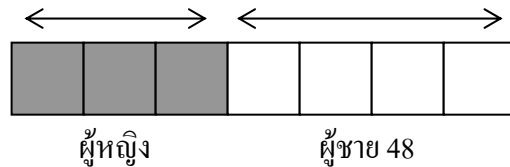


4. Visual : Part + Part = Whole



ตัวอย่างการนำ Part – Whole Model

โรงเรียนแห่งหนึ่งมีนักเรียนหญิง $\frac{3}{7}$ ของนักเรียนทั้งหมด และมีนักเรียนชาย 48 คน จงหาว่ามีนักเรียนหญิงกี่คน



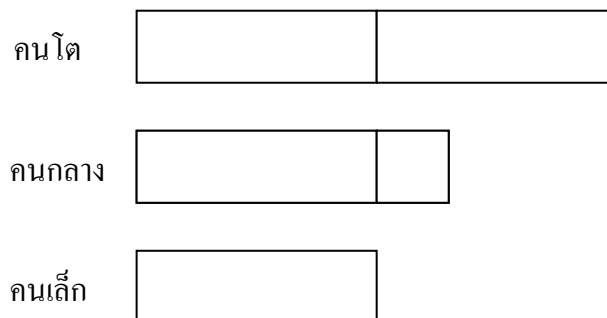
จากภาพ 4 ส่วน เท่ากับ 48 คน

แสดงว่า 1 ส่วน เท่ากับ 12 คน

ดังนั้น มีผู้หญิง 3 ส่วนคิดเป็น $3 \times 12 = 36$ คน

9.1.2 The Comparison Model เป็นความสัมพันธ์ระหว่างของสองสิ่งหรือมากกว่านั้น โดยเปรียบเทียบปริมาณของจำนวนที่มากกว่ากับจำนวนที่น้อย

ตัวอย่าง ครอบครัวหนึ่งมีพี่น้อง 3 คน พี่คนกลางอายุมากกว่าน้องคนเล็ก 12 ปี แต่น้องคนเล็กมีอายุเป็นครึ่งหนึ่งของพี่คนโต และพี่น้องทั้ง 3 คนอายุรวมกันได้ 80 ปี พี่คนโตมีอายุเท่าใด



จากภาพ จะได้ 4 ส่วน เท่ากับ 68 ปี (80-12)

1 ส่วน เท่ากับ 17 ปี

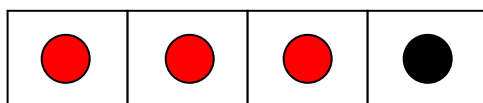
ดังนั้นพี่คนโต อายุ เป็น 2 ส่วน เท่ากับ $17 \times 2 = 34$ ปี

9.1.3 The Change Model รูปแบบนี้จะคล้ายกับ Part – Whole Model แต่แตกต่างกันที่ความสัมพันธ์ระหว่างสิ่งของหรือปริมาณที่มีอยู่เดิม กับสิ่งของหรือปริมาณใหม่ที่เพิ่มหรือลดลง

ตัวอย่าง มีลูกแก้ว 3 ลูก ต่อมาทำให้ลูกแก้วอีก 1 ลูก มีลูกแก้วทั้งหมดกี่ลูก

The Change Model มีขั้นตอนตามทฤษฎีการเรียนรู้ของ Bruner ดังนี้

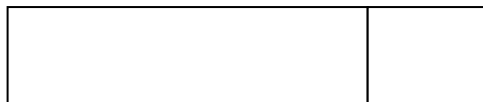
1. Concrete



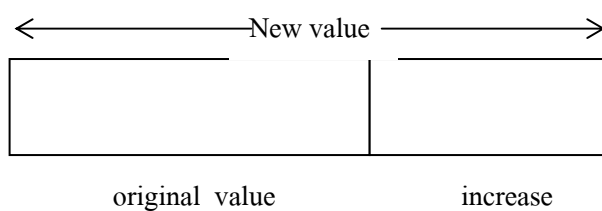
2. Pictorial



3. Abstract



4. Visual : original value + increase = new value



ตัวอย่าง The Change Model

ฟาร์ม A และ ฟาร์ม B เลี้ยงสุกรไว้เป็นอัตราส่วน 5 : 7 ต่อมาฟาร์ม B ให้สุกรกับฟาร์ม A จำนวน 160 ตัว เมื่อนับแล้วปรากฏว่าสุกรทั้งสองฟาร์มมีจำนวนเท่ากัน เดิมแต่ละฟาร์มเลี้ยงสุกรกี่ตัว

ก่อนให้

ฟาร์ม A



ฟาร์ม B



ต่อมา ฟาร์ม B ให้ฟาร์ม A 160 ตัว

ฟาร์ม A

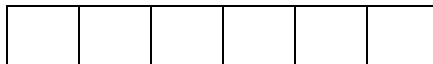


ฟาร์ม B

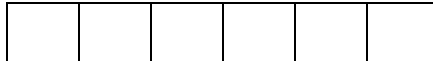


หลังให้ ฟาร์ม A และ ฟาร์ม B มีสุกรเท่ากัน

ฟาร์ม A



ฟาร์ม B



จากภาพ จะได้ว่า 1 ส่วน เท่ากับ 160 ตัว

ดังนั้น 5 ส่วน เท่ากับ $160 \times 5 = 800$ ตัว

7 ส่วน เท่ากับ $160 \times 7 = 1120$ ตัว

นั่นคือ ฟาร์ม A มีสุกร 800 ตัว และฟาร์ม B มีสุกร 1120 ตัว

9.2 การใช้ตารางเพื่อแก้ปัญหา

เป็นอีกทางเลือกหนึ่งที่จะช่วยให้เกิดความเข้าใจและมองเห็นความสัมพันธ์ของสิ่งที่กำหนดให้
ในโจทย์ปัญหาดารางนี้เหมาะสำหรับเรื่องร้อยละ และโจทย์ที่เกี่ยวข้องกับอดีต-ปัจจุบัน-อนาคต
ตัวอย่าง ดินสอราคา 3 แท่ง 5 บาท จะต้องขายแท่งละกี่บาท จึงจะได้กำไร 20 %

แนวคิด แปลความหมาย ได้กำไร 20 %

ซื้อดินสอ →

ทุน	กำไร	ขายไป
100	20	120
5		= ?

พบว่า $\frac{\boxed{}}{120} = \frac{5}{100}$

$\therefore \boxed{} = \frac{5 \times 120}{100} = 6$

ดังนั้น ดินสอ 3 แท่งขายไป 6 บาท

นั่นคือ ขายดินสอแท่งละ 2 บาท

ตัวอย่าง ซื้อเสื้อตัวหนึ่งในราคา 180 บาท โดยได้ส่วนลด 25% อยากทราบเสื้อตัวนี้เมื่อยังไม่ได้ลด

แนวคิด แปลความหมาย ได้ส่วนลด 25%

เพราะว่า ราคาเสื้อเมื่อยังไม่ได้ลด = ราคาที่ติดประกาศ

ติดประกาศขาย	ลดให้	ซื้อมา
100	25	75
= ?		180

พบว่า $\frac{\boxed{}}{100} = \frac{180}{75}$

$$\square = \frac{180 \times 100}{75} = 240$$

ดังนั้น เสื้อเมื่อยังไม่ได้ลดมีราคา 240 บาท

ตัวอย่าง ดิคราคาของไว้โดยคิดกำไร 10 % แต่เวลาขายลด ให้ผู้ซื้อ 10 % ผู้ขายได้กำไรหรือขาดทุนกี่เปอร์เซ็นต์

แนวคิด แปลความหมาย กำไร 10 %

ทุน	กำไร	ดิคราคาขาย
100	10	110

แปลความหมาย ลดให้ผู้ซื้อ 10 %

ดิคราคาขาย	ลดให้	ขายไป
100	10	90

นำตารางมาเชื่อมต่อกัน

ทุน	กำไร	ดิคราคาขาย	ลดให้	ขายไป
100	10	110		= ?
		100	10	$\square$

พบว่า $\frac{\square}{90} = \frac{110}{100}$

$$\therefore \square = \frac{110 \times 90}{100} = 99$$

นั่นคือ ทุน 100 บาท ขายไป 99 บาท ขาดทุน 1 บาท

ดังนั้น ขาดทุน 1 %

9.3 ข้อสอบของสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

ตัวอย่าง มะลิซื้อตู้เย็นมาในราคาลด 30 % จากราคาป้ายที่ร้านติดไว้ จากนั้นขายต่อให้มาลีในราคาต่
บวกเพิ่มเข้าไปอีก 30 % ของราคาซื้อ มาลีซื้อตู้เย็นในราคาต่ำกว่าป้ายที่ร้าน
ติดไว้กี่เปอร์เซ็นต์

แนวคิด แปลความหมาย ลด 30 % จากราคาป้ายเพิ่ม 30 % ของราคาซื้อ

ราคาป้าย	ลดให้	มะลิซื้อ	ขายเพิ่ม	ขายให้มาลี
100	30	70		$\square = ?$
		100	30	130

$$\text{พบว่า } \frac{\square}{130} = \frac{70}{100}$$

$$\square = \frac{70 \times 130}{100} = 91$$

นั่นคือ จากราคาป้าย 100 บาท มะลิซื้อ 91 บาท

ดังนั้น มะลิซื้อต่ำกว่าราคาป้ายที่ติดไว้ $100 - 91 = 9\%$

ตัวอย่าง ข้าวโอชา 160 ลิตร เป็นข้าวที่มีข้าวเหนียวปนอยู่ 10 % ถ้าพ่อค้าเติมข้าวเหนียวลงไปอีก
จนมีข้าวเหนียวปนอยู่ 20 % พ่อค้าใส่ข้าวเหนียวลงไปกี่ลิตร

ข้าวโอชา	มีข้าวเหนียว	มีข้าว
100	10	90
160	x	

$$\text{จากตาราง } x = \frac{160 \times 10}{100} = 16$$

ให้ใส่ข้าวเหนียวลงไป y ลิตร

ข้าวโอชา	มีข้าวเหนียว	มีข้าว
100	20	80
$160 + y$	$16 + y$	

จากตาราง

$$\frac{160 + y}{100} = \frac{16 + y}{20}$$

$$y = 20$$

$\therefore$ ใส่ข้าวเหนียวลงไป 20 ลิตร

ข้อสอบเข้าโรงเรียน Yokyo Risho Chu Gakko สำหรับนักเรียนระดับ ป.6 หรือม.ต้น

ตัวอย่าง มีน้ำเกลือที่มีความเข้มข้น 5% อยู่ 300 กรัม จะใช้วิธีต่อไปนี้ในการทำให้น้ำเกลือเข้มข้น 10%

1. เพิ่มความเข้มข้นโดยใช้วิธีทำให้น้ำระเหย ถามว่า จะต้องทำให้น้ำระเหยไปกี่กรัม
2. ใช้วิธีเติมเกลือ ถามว่าต้องเติมเกลือกี่กรัม
3. ใช้วิธีเติมน้ำเกลือที่เข้มข้น 20% เพิ่มเข้าไป ถามว่าต้องเติมน้ำเกลือเข้มข้น 20% กี่กรัม

มีน้ำเกลือที่มีความเข้มข้น 5% อยู่ 300 กรัม จะใช้วิธีต่อไปนี้ในการทำให้น้ำเกลือเข้มข้น 10%

1. เพิ่มความเข้มข้นโดยใช้วิธีทำให้น้ำระเหย ถามว่า จะต้องทำให้น้ำระเหยไปกี่กรัม

แนวคิด แปลความหมาย มีน้ำเกลือที่มีความเข้มข้น 5% อยู่ 300 กรัม

น้ำเกลือ	มีเกลือ	มีน้ำ
100	5	95
300	15	285

ให้น้ำระเหยไป x กรัม เพื่อให้ได้น้ำเกลือเข้มข้น 10%

น้ำเกลือ	มีเกลือ	มีน้ำ
100	10	90
$300 - x$	15	$285 - x$

$$\text{พบว่า } \frac{285 - x}{90} = \frac{15}{10}$$

$$x = 285 - 135 = 150$$

∴ ต้องทำให้น้ำระเหยไป 150 กรัม

มีน้ำเกลือที่มีความเข้มข้น 5% อยู่ 300 กรัม จงใช้วิธีต่อไปนี้ในการทำให้น้ำเกลือเข้มข้น 10%

2. ใช้วิธีเติมเกลือ ถ้ามวลต้องเติมเกลือกี่กรัม

แนวคิด แปลความหมาย มีน้ำเกลือที่มีความเข้มข้น 5% อยู่ 300 กรัม

น้ำเกลือ	มีเกลือ	มีน้ำ
100	5	95
300	15	285

ให้เติมเกลือลงไป x กรัม เพื่อให้ได้น้ำเกลือเข้มข้น 10%

น้ำเกลือ	มีเกลือ	มีน้ำ
100	10	90
$300 + x$	$15 + x$	285

$$\text{พบว่า } \frac{15 + x}{10} = \frac{285}{90}$$

$$x = \frac{50}{3}$$

∴ ต้องเติมเกลือลงไป $16\frac{2}{3}$ กรัม

มีน้ำเกลือที่มีความเข้มข้น 5% อยู่ 300 กรัม จงใช้วิธีต่อไปนี้ในการทำให้น้ำเกลือเข้มข้น 10%

3. ใช้วิธีเติมน้ำเกลือที่เข้มข้น 20% เพิ่มเข้าไป ถามว่าต้องเติมน้ำเกลือเข้มข้น 20% กี่กรัม

แนวคิด แปลความหมาย มีน้ำเกลือที่มีความเข้มข้น 5% อยู่ 300 กรัม

น้ำเกลือ	มีเกลือ	มีน้ำ
100	5	95
300	15	285

ให้เติมน้ำเกลือที่เข้มข้น 20% ลงไป x กรัม

น้ำเกลือ	มีเกลือ	มีน้ำ
100	20	80
x	$\frac{20x}{100} = \frac{x}{5}$	$\frac{80x}{100} = \frac{4x}{5}$

เติมน้ำเกลือที่เข้มข้น 20% ลงไป x กรัมเพื่อให้น้ำเกลือเข้มข้น 10%

น้ำเกลือ	มีเกลือ	มีน้ำ
100	10	90
$300 + x$	$15 + \frac{x}{5}$	$285 + \frac{4x}{5}$

$$\text{พบว่า } \frac{300 + x}{100} = \frac{15 + \frac{x}{5}}{10}$$

$$\frac{300 + x}{100} = \frac{75 + x}{50}$$

$$x = 150$$

$\therefore$ เติมน้ำเกลือที่เข้มข้น 20% ลงไป 150 กรัม

ตัวอย่าง จะต้องใช้น้ำเชื่อม A ซึ่งเป็นน้ำเชื่อม 14 % ที่ลิตรผสมกับน้ำเชื่อม B ซึ่งเป็นน้ำเชื่อม 50 %

จำนวน 20 ลิตร ทำให้ได้น้ำเชื่อม C ซึ่งเป็นน้ำเชื่อม 20 %

แนวคิด น้ำเชื่อม A จำนวน x ลิตรผสมกับน้ำเชื่อม B จำนวน 20 ลิตร เป็นน้ำเชื่อม C

ชนิด	น้ำเชื่อม(น้ำ+น้ำตาล)	มีน้ำตาล
A 14 %	100 ลิตร x ลิตร	14 ลิตร $\frac{14x}{100}$ ลิตร
B 50 %	100 ลิตร 20 ลิตร	50 ลิตร $\frac{50 \times 20}{100} = 10$ ลิตร
A + B	20 + x ลิตร	$\frac{14x}{100} + 10$ ลิตร
C 20 %	100 ลิตร 20 + x ลิตร	20 ลิตร $\frac{20}{100} \times (20 + x)$ ลิตร

เพราะว่า $A + B = C$

$$\therefore \frac{14x}{100} + 10 \text{ ลิตร} = \frac{20}{100} \times (20 + x)$$

$$x = 1600 \text{ ลิตร}$$

จะต้องใช้น้ำเชื่อม A 1600 ลิตร

ตัวอย่าง เมื่อ 4 ปีที่แล้วพ่อมีอายุเป็น 7 เท่าของลูก แต่ในอีก 4 ปีข้างหน้าพ่อจะมีอายุเป็น 4 เท่าของลูก
ปัจจุบันพ่อมีอายุเป็น กี่เท่าของลูก

ให้ปัจจุบันลูกอายุ x ปี

	อดีต	ปัจจุบัน	อนาคต
ลูก	$x - 4$	x	$x + 4$
พ่อ	$7(x - 4)$		$4(x + 4)$

ความสัมพันธ์ที่พบ

อายุพ่อในอนาคต - อายุพ่อในอดีต = 8 ปี

$$4(x + 4) - 7(x - 4) = 8$$

$$x = 12$$

ปัจจุบันลูกอายุ 12 ปี

และพ่ออายุ $4(12 + 4) - 4 = 60$ ปี

$$\therefore \text{พ่อมีอายุ } \frac{60}{12} = 5 \text{ ลูก}$$

ตัวอย่าง พ่อค้าประกาศลดราคาสินค้าทุกชนิด 10 % ของราคาที่ยึดไว้พ่อค้าต้องการกำไร 8 %
จึงคิดราคาตัวไว้ 1620 บาท ถ้าพ่อค้าต้องการกำไร 10 % จะต้องคิดราคาตัวไว้เท่าใด

	ทุน	คิดราคาไว้	ขายไป
ลด 10 %		100	90
กำไร 8 %	100	x	108
	y	1620	

$$\text{จากตาราง } x = \frac{108 \times 100}{90} = 120$$

$$y = \frac{1620 \times 100}{120} = 1350$$

	ทุน	คิดราคาไว้
กำไร 10 %	100	110
	1350	z

$$z = \frac{1350 \times 110}{100} = 1485$$

จะต้องคิดราคาตัวไว้ 1485 บาท

บทที่ 10

การวิจัยในชั้นเรียน

หลังจากมีการประกาศใช้พระราชบัญญัติการศึกษาแห่งชาติ พ.ศ. 2542 แนวคิด เรื่องการปฏิรูปการทำงานของครูให้มีความเป็นครูวิชาชีพ รวมทั้งการที่ครูต้องทำวิจัยเพื่อพัฒนาการเรียนรู้ของผู้เรียน ได้มีการกล่าวถึงอย่างแพร่หลาย เพราะในพระราชบัญญัติการศึกษาแห่งชาติฉบับนี้ ได้กำหนดแนวทางการสนับสนุนให้ครูผู้สอนใช้กระบวนการวิจัยเพื่อพัฒนาการเรียนรู้ของผู้เรียนไว้ในหมวดที่ 4 ว่าด้วยแนวการจัดการศึกษา มาตรา 24 (5) มีใจความสำคัญดังนี้

“ส่งเสริมสนับสนุนให้ผู้สอนสามารถจัดบรรยากาศ สภาพแวดล้อม สื่อการเรียน และอำนวยความสะดวกเพื่อให้ผู้เรียนเกิดการเรียนรู้ รวมทั้งสามารถใช้การวิจัยเป็นส่วนหนึ่งของกระบวนการเรียนรู้ ทั้งนี้ ผู้สอนและผู้เรียนอาจเรียนรู้ไปพร้อมกัน จากสื่อการเรียนการสอนและแหล่งวิทยาการประเภทต่าง ๆ”

และมาตรา 30 กล่าวว่า “ให้สถานศึกษาพัฒนากระบวนการเรียนการสอนที่มีประสิทธิภาพ รวมทั้งการส่งเสริมให้ผู้สอนสามารถใช้กระบวนการวิจัยเพื่อพัฒนาการเรียนรู้ที่เหมาะสมแก่ผู้เรียนในแต่ละระดับการศึกษา”

จากข้อความในพระราชบัญญัติ ดังกล่าวข้างต้น ทำให้แนวคิด เรื่อง การที่ครูต้องศึกษาเด็กเป็นรายบุคคล และการพัฒนาผู้เรียนตามธรรมชาติและเต็มตามศักยภาพ ตามที่กำหนดไว้ในพระราชบัญญัติการศึกษาแห่งชาติฉบับนี้เช่นกัน ในมาตรา 22 มีความเป็นจริงเป็นจังในแนวปฏิบัติเพื่อพัฒนาผู้เรียนด้วยการใช้กระบวนการวิจัยในความหมายของการแก้ปัญหาแบบใหม่ การหาคำตอบแบบใหม่ โดยวิธีการที่เชื่อถือได้หรือวิธีการที่ยอมรับในศาสตร์นั้น ๆ (อุทุมพร (ทองอุไทย) จามรมาน 2544 : 1) มากขึ้น

แต่อย่างไรก็ตาม เมื่อกล่าวถึงคำว่า “การวิจัย” ในทางปฏิบัติ ครูจำนวนมากยังมีความรู้สึกสับสน เนื่องจากการรับรู้เดิมที่มีต่อการวิจัยที่ว่า การวิจัยเป็นเรื่องยุ่งยาก เป็นงานหนักที่ต้องอาศัยความรู้และประสบการณ์ในการทำงานสูง ต้องทุ่มเทเวลาและความสามารถในการวิจัยมาก แม้จะได้รับข่าวสารจากการอบรม การประชุมสัมมนา การประชุมเชิงปฏิบัติการหรือการศึกษาเอกสาร เรื่องการวิจัยในชั้นเรียนว่า การวิจัยในชั้นเรียน ไม่ใช่สิ่งที่แปลกแยกไปจากงานปกติในหน้าที่ของครู ครูก็ยังสงสัยต่อไปอีกว่า ในเมื่อเป็นงานที่ครูทำอยู่แล้ว ทำไมจึงต้องมีการหยิบยกขึ้นมาเป็น

จุดเน้นในการทำหน้าที่ของครูในพระราชบัญญัติการศึกษาแห่งชาติ บางที่การอุปมาอุปไมยต่อไปนี้อาจจะช่วยให้ครามีคำตอบที่กระจ่างต่อความกังวลนี้ได้ เช่น

ในการปฏิบัติ "อานาปานสติ" หรือ "สติกำหนดลมหายใจเข้าออก" ซึ่งเป็นที่ยอมรับกันโดยทั่วไปว่า เป็นสิ่งที่มีผลดีต่อสุขภาพทางจิต และส่งผลกระทบไปถึงสุขภาพทางกายของผู้ปฏิบัติ แต่ผู้ที่ยังไม่เข้าใจหรือยังไม่เคยประจักษ์ในผลดังกล่าวอาจจะยังสงสัยว่า ทำไมจึงต้องทำ "อานาปานสติ" ในเมื่อปกติคนที่ยังมีชีวิตทุกคนต้องหายใจเข้าออกอยู่แล้ว ทำนองเดียวกับคำถามที่ว่า ทำไมจึงต้องทำ "การวิจัยในชั้นเรียน" เมื่อครูต้องทำหน้าที่จัดการเรียนรู้ให้กับผู้เรียนที่ตนรับผิดชอบอยู่แล้ว

การทำ "อานาปานสติ" ให้กำหนดรู้ลมหายใจเข้าออกของตัวเอง สังเกตเห็นและมีวิธีการบังคับให้ลมหายใจมีลักษณะตามที่ต้องการอย่างมีระเบียบ กฎเกณฑ์ ส่งผลดีต่อสุขภาพจิตและกายมากกว่าการหายใจเข้าออกตามความเคยชินโดยไม่รู้ตัวฉันใด การทำ "การวิจัยในชั้นเรียน" ให้รู้จักในปัญหาการเรียนรู้ที่เกิดขึ้น รู้สาเหตุของปัญหา ศึกษาหาวิธีแก้ปัญหา และดำเนินการแก้ปัญหาอย่างเป็นระบบ ก็ย่อมส่งผลดีต่อการพัฒนาคุณภาพของการเรียนรู้ได้มากกว่าการจัดการเรียนรู้ไปตามความเคยชินโดยไม่ได้ตระหนักถึงปัญหาการจัดการเรียนรู้ของตนเอง ฉะนั้น

ดังนั้น การวิจัยในชั้นเรียน จึงเป็นกระบวนการที่จะช่วยให้ครูผู้สอนสามารถพัฒนาระบบการจัดการเรียนรู้ของตนให้มีประสิทธิภาพและเกิดประโยชน์สูงสุดแก่ผู้เรียน ทำให้กระบวนการจัดการเรียนรู้ของครู มีความเป็นวิชาชีพและมีความเป็นศาสตร์ในวิถีวิทยาของการจัดการเรียนรู้มากขึ้น ดังที่หลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2544 ก็ได้กล่าวถึงเรื่องของ การวิจัยเพื่อพัฒนาการเรียนรู้ ไว้สอดคล้องกับพระราชบัญญัติการศึกษาแห่งชาติ พ.ศ. 2542 ความว่า การจัดการเรียนรู้ตามหลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐาน มีรูปแบบและวิธีการที่หลากหลาย เพื่อให้สอดคล้องกับ ความถนัด ความสนใจ และความต้องการของผู้เรียน โดยให้ผู้สอนนำกระบวนการวิจัยมาผสมผสานหรือบูรณาการ ใช้ในการจัดการเรียนรู้เพื่อพัฒนาคุณภาพของผู้เรียน และเพื่อให้ผู้เรียนเกิดการเรียนรู้ สามารถใช้กระบวนการวิจัยเป็นส่วนหนึ่งของกระบวนการเรียนรู้ โดยมีขั้นตอนการปฏิบัติ เริ่มตั้งแต่การวิเคราะห์ปัญหา การวางแผนแก้ปัญหาหรือพัฒนา การดำเนินการแก้ปัญหาหรือพัฒนา การเก็บรวบรวมข้อมูล การสรุปผลการแก้ปัญหาหรือการพัฒนา การรายงานผลการเรียนรู้ และการนำผลการวิจัยไปประยุกต์ใช้ (กระทรวงศึกษาธิการ 2544 : 34) เป็นต้น

10.1 แนวคิดของการวิจัยในชั้นเรียน

10.1.1 ความหมาย ความสำคัญ และประโยชน์ของการวิจัยในชั้นเรียน

1. ความหมายของการวิจัยในชั้นเรียน

การวิจัยในชั้นเรียนเป็นกระบวนการในการแก้ปัญหาหรือพัฒนากระบวนการจัดการเรียนรู้ในชั้นเรียนที่ครูรับผิดชอบอย่างเป็นระบบ เพื่อสืบค้นให้ได้สาเหตุของปัญหา แล้วหาวิธีแก้ไขหรือพัฒนาที่เชื่อถือได้ เช่น การสังเกต จดบันทึก และวิเคราะห์หรือสังเคราะห์ เพื่อนำไปสู่การแก้ปัญหาหรือพัฒนากระบวนการจัดการเรียนการสอนของครู และพัฒนาการเรียนรู้ของผู้เรียนให้มีคุณภาพตามเป้าหมายที่กำหนดไว้ เพื่อส่งเสริมผู้เรียนให้ได้รับการพัฒนาตามธรรมชาติและเต็มตามศักยภาพ

2. ความสำคัญของการวิจัยในชั้นเรียน

การแก้ปัญหาหรือการพัฒนาผู้เรียนในชั้นเรียนด้วยกระบวนการวิจัยที่ครูผู้สอนเป็นผู้ปฏิบัติ เป็นสิ่งที่จะให้ผลดีแก่ผู้เรียนมากกว่าการที่ครูแก้ปัญหาในชั้นเรียนของตนตามผลการวิจัยของผู้อื่น เนื่องจากครูผู้สอนเป็นผู้ที่ใกล้ชิดกับผู้เรียนมากที่สุด ครูจึงย่อมรู้ธรรมชาติ ภูมิหลังและสภาพแวดล้อมของผู้เรียนของตนดีกว่าผู้อื่น แต่ครูก็ต้องพยายามศึกษา ค้นคว้าหาแนวทางการแก้ปัญหาการเรียนการสอนที่ผู้อื่นทำวิจัยไว้ เพื่อนำมาเป็นฐานความคิดในการปรับนำไปใช้ให้เหมาะสมกับผู้เรียนของตน และจะได้รู้ถึงข้อควรระวังที่ผู้วิจัยคนก่อนได้นำเสนอไว้ เพื่อป้องกันความผิดพลาดซ้ำรอยเดิม รวมทั้งควรปรึกษาแลกเปลี่ยนเรียนรู้กับผู้รู้ ผู้มีประสบการณ์ภายในโรงเรียน หรือบุคคลภายนอกเพื่อปรับแนวคิดและประสบการณ์เหล่านั้น มาใช้เป็นแนวทางที่นำมาใช้แก้ปัญหาในชั้นเรียนของตนได้อย่างมั่นใจต่อไป

การวิจัยในชั้นเรียนจึงไม่ใช่สิ่งใหม่ที่แปลกแยกไปจากการพัฒนาการเรียนการสอนซึ่งเป็นงานในหน้าที่ของครูโดยทั่วไป และไม่ใช่เรื่องที่ย่างยากเกินความสามารถของครู แต่อย่างไรก็ตามการพัฒนาการเรียนการสอนเป็นงานที่ต้องใช้เวลา และต้องกระทำอย่างต่อเนื่อง การวิจัยในชั้นเรียนจึงไม่ใช่การวิจัยที่ทำเพียงครั้งเดียว แต่ควรทำอย่างต่อเนื่องจนเป็นปกติของงานในหน้าที่ในการแก้ปัญหาและพัฒนาผู้เรียนของครู

3. ประโยชน์ของการวิจัยในชั้นเรียน

การวิจัยในชั้นเรียนมีประโยชน์ต่อผู้เรียน ครู โรงเรียน และวงการการศึกษา ดังนี้

3.1 ประโยชน์ต่อผู้เรียน เนื่องจากผู้เรียนในชั้นเรียนมีความรู้ความสามารถพื้นฐานแตกต่างกัน ถ้าครูใช้รูปแบบการสอนเพียงแบบเดียวกับผู้เรียนทุกคน อาจทำให้ผู้เรียนบางคนไม่ได้รับการพัฒนาหรือแก้ไขปัญหา ซึ่งอาจส่งผลกระทบไปถึงปัญหาอื่น เช่น จากปัญหาพฤติกรรมเรียนส่งผลกระทบไปถึงปัญหาความประพฤติ ส่งผลกระทบไปถึงครูวิชาอื่น ครูที่รับช่วงในชั้นต่อไป โรงเรียน และสังคมโดยรวม จึงเป็นหน้าที่ของครูที่จะต้องพยายามวิเคราะห์หาสาเหตุของปัญหา แล้วคิดหาทางแก้ปัญหานั้นจนสามารถเปลี่ยนแปลงพฤติกรรมของผู้เรียนให้ดีขึ้น พัฒนาผู้เรียนให้เกิดการเรียนรู้ ใฝ่เรียน มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนอยู่ในระดับที่น่าพอใจ และไม่มีปัญหาการเรียนอีกต่อไป ซึ่งส่งผลไปถึงการจัดปัญหาและผลกระทบอื่นๆ ด้วย

3.2 ประโยชน์ต่อครู ครูมีการวางแผนการทำงานในหน้าที่ของตนอย่างเป็นระบบ ได้แก่ วางแผนการเรียนการสอน ออกแบบการจัดกระบวนการเรียนรู้ที่เหมาะสมกับผู้เรียน ประเมินผลการทำงานเป็นระยะ โดยมีเป้าหมายชัดเจนว่าจะทำอะไร กับใคร เมื่อไร เพราะอะไร และทำให้ทราบผลการกระทำว่า บรรลุเป้าหมายได้อย่างไร เพียงใด ช่วยให้ครูเกิดความคิดริเริ่มสร้างสรรค์ ในการหาทางแก้ปัญหานั้นได้อย่างเหมาะสม ได้ค้นนวัตกรรมที่ผ่านการปรับปรุงจนเป็นที่ยอมรับได้ และเกิดความมั่นใจในการทำงานมากขึ้น สามารถอธิบายได้ว่าตนเองสามารถจัดการเรียนรู้ให้เกิดผลแก่ผู้เรียนเป็นรายคนและแต่ละคนอย่างไรบ้าง

3.3 ประโยชน์ต่อโรงเรียน ครูในโรงเรียนมีปฏิสัมพันธ์กันมากขึ้นทั้งภายในหมวดวิชา และระหว่างหมวดวิชา มีการร่วมกันคิดแก้ปัญหา ตั้งแต่การวิเคราะห์หาสาเหตุจนถึงการเขียนรายงาน การได้ระดมสรรพกำลังจากความคิดของแต่ละคนจะทำให้งานวิจัยมีคุณภาพยิ่งขึ้น เช่น ครูคณิตศาสตร์ช่วยในเรื่องการคำนวณ การวิเคราะห์และนำเสนอข้อมูล ครูบรรณารักษ์ช่วยดูแลการเขียนบรรณานุกรม เป็นต้น การศึกษาค้นคว้าเอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับงานในหน้าที่ที่ครูรับผิดชอบอยู่ จะช่วยให้การบริหารงานวิชาการในโรงเรียนเป็นไปอย่างมีประสิทธิภาพมากขึ้น สามารถวิเคราะห์สาเหตุและชี้ประเด็นปัญหาได้ชัดเจน แก้ปัญหาได้ตรงจุด เป็นการสร้างเครือข่ายกัลยาณมิตรกันทางวิชาการในโรงเรียน และยกระดับมาตรฐานวิชาการของโรงเรียนให้สูงขึ้น

3.4 ประโยชน์ต่อวงการการศึกษา ผลงานการวิจัยในชั้นเรียน สามารถนำมาเป็นข้อมูลในการแลกเปลี่ยนเรียนรู้ของครูเกี่ยวกับวิธีการแก้ปัญหาและพัฒนาผู้เรียนที่ครูแต่ละคนดำเนินการว่ามีความเหมือนกันหรือต่างกันอย่างไร ครูผู้สอนแต่ละคนจะประยุกต์นำไปใช้เพื่อ

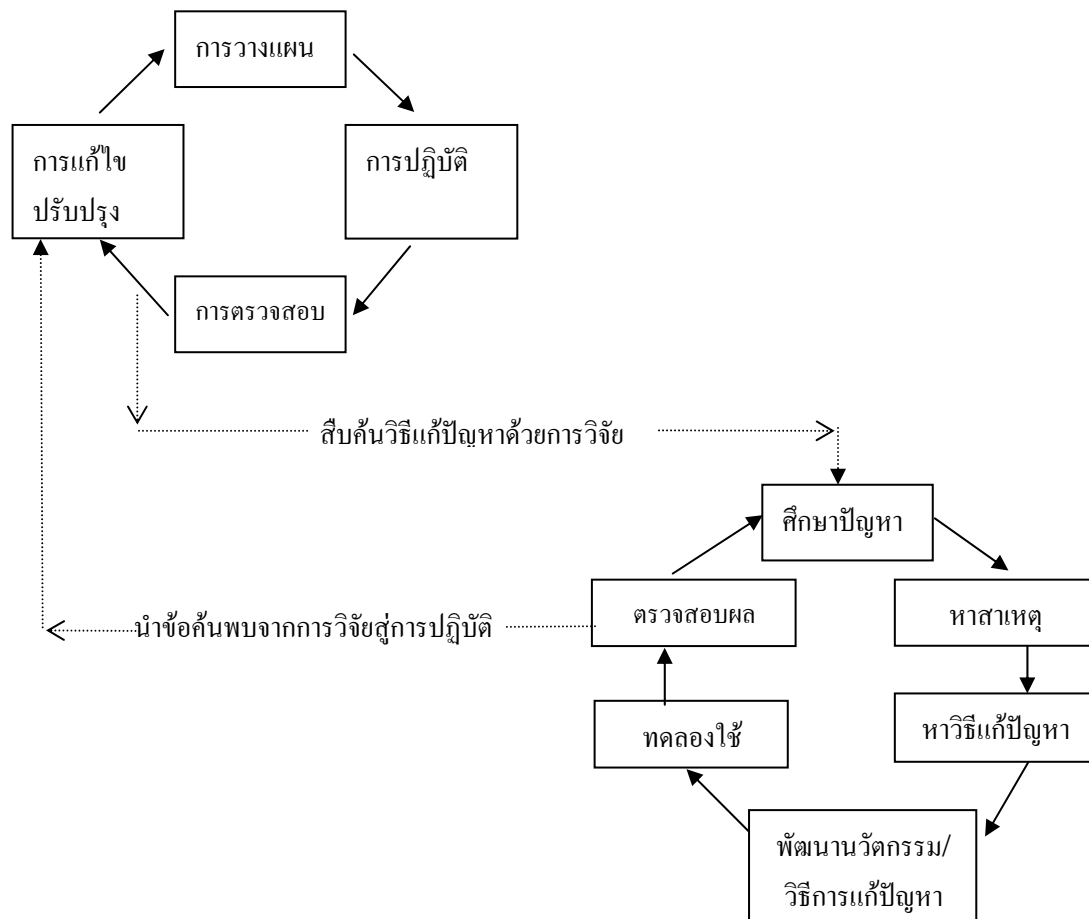
พัฒนาผู้เรียนของตนได้อย่างไร เป็นการสร้างสังคมทางการศึกษา และกระตุ้นให้มีการพัฒนาผลงานทางวิชาการที่เกิดขึ้นจากประสบการณ์อันมีคุณค่าของครูอย่างไม่หยุดยั้ง ทำให้วิชาชีพครูมีภาพลักษณ์ที่ดี เป็นที่ยอมรับของสังคมมากขึ้น

10.1.2 การวิจัยในชั้นเรียนกับการพัฒนาคุณภาพการจัดการเรียนรู้

เนื่องจากการวิจัยในชั้นเรียนเป็นส่วนหนึ่งของการประกันคุณภาพภายในสถานศึกษาใน ส่วนของการพัฒนาผู้เรียนให้เป็นไปตามธรรมชาติและเต็มตามศักยภาพ ดังนั้นการวิจัยในชั้นเรียน จึงควรดำเนินการให้สอดคล้องกับขั้นตอนการพัฒนาคุณภาพการจัดการเรียนรู้อย่างเป็นระบบที่ โรงเรียนทั่วไปใช้กันอยู่ คือ ขั้นตอนการพัฒนาตามวงจรคุณภาพของเดมมิ่ง (P-D-C-A) ซึ่ง ประกอบด้วย การวางแผน (Plan) การปฏิบัติการ (Do) การตรวจสอบ (Check) และการแก้ไข ปรับปรุง (Action) ส่วนการวิจัยในชั้นเรียน ประกอบด้วยขั้นตอนการทำงานที่สำคัญ คือ ศึกษา ปัญหาในชั้นเรียน จากนั้นเลือกปัญหาที่มีความจำเป็นเร่งด่วนซึ่งมีความสำคัญในลำดับต้น ๆ มา แก้ปัญหา ขั้นตอนของการแก้ปัญหาคือหาสาเหตุที่แท้จริงของปัญหา แล้วศึกษาหาวิธีการ แก้ปัญหาที่คาดว่าจะสามารถนำมาใช้ได้ผล ซึ่งอาจเป็นสื่อ เทคนิค วิธีการจัดกิจกรรม ฯลฯ แล้วเลือก พัฒนานวัตกรรมหรือวิธีการที่เหมาะสม ตรวจสอบและปรับปรุง แล้วนำมาทดลองใช้ รวบรวม ข้อมูลจากการทดลอง ตรวจสอบ วิเคราะห์ อภิปราย และสรุปผลการทดลองให้ชัดเจน เป็น รูปธรรม ในกรณีปัญหาที่เกิดขึ้นในชั้นเรียนเป็นปัญหาที่ต้องได้รับการแก้ไขอย่างรีบด่วน จะ แก้ปัญหาโดยใช้กระบวนการวิจัยก็ไม่ทันการณ์ ครูก็สามารถศึกษาและนำผลงานวิจัยของครูคนอื่น ที่ใช้แก้ปัญหาเดียวกันมาใช้แก้ปัญหาในชั้นเรียนของตนได้ ถือเป็น การบริโภคนงานวิจัยอย่างคุ้มค่า วิธีหนึ่ง

วงจรการพัฒนาคุณภาพการจัดการเรียนรู้และวงจรการวิจัยในชั้นเรียนดังกล่าวข้างต้น
จึงมีความเกี่ยวข้องสัมพันธ์กัน ดังแผนภาพต่อไปนี้

วงจรการพัฒนาคุณภาพการจัดการเรียนรู้



ดังนั้น กระบวนการวิจัยในชั้นเรียนจึงบูรณาการอยู่ในกระบวนการพัฒนาคุณภาพการจัดการเรียนรู้ เป็นงานของครูที่มุ่งศึกษากระบวนการพัฒนาการเรียนรู้ของผู้เรียนให้ได้ผลตรงตามความต้องการ และทันเหตุการณ์ จัดทำได้ง่าย เป็นการวิจัยที่ครูผู้สอนจัดกระทำกับกลุ่มผู้เรียนที่ตนรับผิดชอบอยู่ ผลการวิจัยจึงไม่จำเป็นต้องสรุปอ้างอิงไปถึงผู้เรียนกลุ่มอื่น และไม่จำเป็นต้องใช้สถิติขั้นสูง เพราะการวิจัยในชั้นเรียนเป็นการวิจัยที่ครูทำเพื่อแก้ปัญหาในชั้นเรียนของตนเอง และทำกับกลุ่มผู้เรียนกลุ่มเล็กที่ครูต้องการพัฒนาหรือแก้ปัญหาวางประการ บางเรื่อง เพื่อพัฒนา (ปรับปรุง

ผู้เรียนอ่อน (เสริมผู้เรียนเก่ง) ผู้เรียนคนนั้น กลุ่มนั้น เพื่อจะได้เรียนทันเพื่อนกลุ่มใหญ่หรือได้รับการพัฒนาเต็มศักยภาพของเขา (อุทุมพร (ทองอุไทย) จามรمان 2544 : 1)

10.2 วิธีการวิจัยในชั้นเรียน

เนื่องจากการวิจัยในชั้นเรียนมีจุดมุ่งหมายเพื่อให้ครูใช้กระบวนการวิจัยในการแก้ปัญหาและพัฒนาผู้เรียน จุดเน้นของการวิจัยในชั้นเรียนจึงอยู่ที่ขั้นตอนการทำวิจัยที่จะแก้ปัญหาหรือพัฒนาผู้เรียน ซึ่งได้แก่ การศึกษาถึงปัญหาและจุดที่ต้องการพัฒนา ศึกษาถึงสาเหตุของปัญหา ศึกษาพฤติกรรมหรือวิธีการแก้ปัญหา สร้างและพัฒนานวัตกรรมการเรียนรู้ นำนวัตกรรมการเรียนรู้ไปใช้แก้ปัญหาการเรียนรู้ของผู้เรียน หรือปัญหาการสอนของครู ประมวลผลการแก้ปัญหา สรุปผลการทดลองและเขียนรายงานเพื่อเผยแพร่

10.2.1 จุดเริ่มต้นของการวิจัยในชั้นเรียน

จากภาพที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างวงจรการพัฒนาคุณภาพการจัดการเรียนรู้และการวิจัยในชั้นเรียน จะเห็นว่าจุดเริ่มต้นของการวิจัยในชั้นเรียนเริ่มขึ้นที่การพบปัญหาจากขั้นการตรวจสอบของวงจรพัฒนาคุณภาพการจัดการเรียนรู้ ซึ่งครูจะได้ข้อมูลเกี่ยวกับผลการเรียนและปัญหาที่เกิดขึ้นจากขั้นการตรวจสอบนั้น ในกรณีที่ครูมีข้อมูลของผู้เรียนเกี่ยวกับปัญหาที่ตรวจพบอย่างเพียงพอและมีแนวทางว่าควรทำการปรับปรุงแก้ไขอย่างไร ก็สามารถแก้ไขปรับปรุงได้ทันทีโดยไม่ต้องทำการวิจัย แต่ถ้าหากว่าครูยังมีข้อมูลไม่เพียงพอและยังไม่มีแนวทางที่จะแก้ไขปรับปรุงก็จำเป็นต้องใช้กระบวนการวิจัยในชั้นเรียนมาช่วย โดยการค้นหาข้อมูลอันเป็นสาเหตุของปัญหาและแนวทางแก้ไข และทำการวิจัยให้เป็นส่วนหนึ่งของการทำงานปกติ โดยครูอาจเริ่มต้นด้วยงานวิจัยขนาดเล็กที่มุ่งแก้ปัญหาที่เฉพาะเจาะจง เพื่อให้สามารถควบคุมกระบวนการวิจัยให้อยู่ในวิสัยที่ครูสามารถดำเนินการได้

10.2.2 รูปแบบและขั้นตอนการทำวิจัยในชั้นเรียน

การวิจัยในชั้นเรียนเป็นการนำรูปแบบกระบวนการวิจัยและพัฒนา (Research and Development) มาแก้ปัญหของผู้เรียน โดยพัฒนากระบวนการเรียนรู้หรือนวัตกรรมที่เหมาะสมกับผู้เรียน ดังกรณีตัวอย่าง ต่อไปนี้

ในกรณีเมื่อครูพบว่าผู้เรียนในห้องเรียนมีปัญหาด้านการเรียนรู้ในกลุ่มประสบการณ์หรือวิชาใด วิชาหนึ่ง เฉพาะด้าน เช่น ทำโจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ไม่ได้หรืออ่านคำที่มีตัวสะกดบางมาตราไม่ได้ ครูอาจคิดนวัตกรรมเพื่อแก้ปัญหของผู้เรียนเป็นรายคน รายกลุ่มย่อย นำไปทดลองใช้หรือให้ผู้เชี่ยวชาญตรวจสอบคุณภาพเบื้องต้น แล้วนำมาแก้ปัญหการเรียนรู้ของผู้เรียน และสามารถแก้ปัญหาก็ได้ การวิจัยแบบนี้จึงเป็นการวิจัยจากปัญหาในชั้นเรียนและแก้ปัญหานั้นที่ครูพบปัญหา

ในกรณีที่ครูพบว่าผู้เรียนมีปัญหาด้านพฤติกรรมเป็นรายคน รายกลุ่ม หรือทั้งชั้น ครูอาจศึกษาผู้เรียนเป็นรายกรณี ซึ่งอาจจะเป็นรายคน รายกลุ่ม รายชั้น แล้วแก้ปัญหาก็ให้ผู้เรียนจนเกิดพฤติกรรมใหม่ที่พึงประสงค์ที่คงทน ถือว่าครูได้ทำวิจัยเพื่อแก้ปัญหาด้านพฤติกรรมของผู้เรียนแล้ว

ขั้นตอนการทำวิจัยในชั้นเรียน สามารถดำเนินการดังต่อไปนี้

1. วิเคราะห์สภาพปัญหาที่เกิดขึ้นในชั้นเรียน การวิเคราะห์สภาพปัญหาในชั้นเรียนเป็นขั้นตอนสำคัญที่ครูต้องสำรวจว่า มีอะไรเกิดขึ้น สิ่งนั้นเป็นปัญหาหรือไม่ และหากสภาพที่เกิดขึ้นแสดงถึงปัญหาที่ต้องแก้ไขหลายประการ ครูก็ต้องจัดลำดับความสำคัญก่อนหลังของปัญหาเหล่านั้น โดยพิจารณาจากความรุนแรงของปัญหา ว่าปัญหาใดควรได้รับการแก้ไขก่อน

ครูสามารถสำรวจและวิเคราะห์ปัญหาได้หลายลักษณะ เช่น วิเคราะห์ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนในแง่มุมต่างๆ ตรวจสอบรูปแบบฝึกหัด สังเกตพฤติกรรมของผู้เรียน ศึกษาข้อมูลจากการประเมินของผู้ที่เกี่ยวข้อง เป็นต้น ครูจะพบปัญหา ข้อสงสัยที่เกิดจากผู้เรียน ครู และกระบวนการเรียนการสอน เช่น

- ผู้เรียนมีความสามารถในการทำโจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ต่ำ
- ผู้เรียนไม่ชอบเรียนคณิตศาสตร์
- ผู้เรียนไม่มีทักษะในการใช้เครื่องมือทดลองทางวิทยาศาสตร์
- ผู้เรียนยังไม่ได้ปฏิบัติตนเกี่ยวกับความรับผิดชอบให้เป็นนิสัย
- ครูสอนอย่างเคร่งเครียด ผู้เรียนไม่สนุกและไม่มีความสุขในการเรียน
- ครูใช้สื่อไม่เหมาะสมกับวัย วุฒิภาวะ และความสามารถของผู้เรียน
- ครูไม่ได้จัดให้ผู้เรียนได้มีโอกาสเรียนรู้จากการปฏิบัติจริงด้วยตนเอง

ปัญหาที่จะนำมาทำการวิจัยในชั้นเรียน ควรมีความหมายและเอื้อประโยชน์ต่อการเรียนรู้ อยู่ในวิสัยที่ครูจะเป็นผู้ดำเนินการหาคำตอบได้ สอดคล้องกับความสนใจและความถนัดของครูผู้วิจัย

2. วิเคราะห์สาเหตุของปัญหา เมื่อเลือกปัญหาได้แล้วต้องวิเคราะห์หาสาเหตุของปัญหา เพื่อจะได้แก้ปัญหาคือตรงเหตุ ปัญหาจึงจะได้รับการแก้ไขให้ลุล่วงได้ สาเหตุของปัญหาอาจเกิดจากพฤติกรรม การสอน การใช้สื่อหรือการวัดผลของครู ทักษะคติ พื้นฐานภูมิหลัง นิสัยหรือพฤติกรรมของผู้เรียน ระดับความยากหรือปริมาณของเนื้อหาวิชา หรือบรรยากาศการเรียนรู้ที่ไม่เอื้ออำนวย เช่น ห้องเรียนคับแคบ ร้อน แสงสว่างไม่พอ แหล่งเรียนรู้สำหรับศึกษาค้นคว้าไม่เพียงพอ เป็นต้น

ในกรณีที่พบว่าสาเหตุของปัญหามีหลายสาเหตุ อาจเลือกสาเหตุที่มีความสำคัญซึ่งเป็นสาเหตุต้นตอของสาเหตุอื่น ๆ ซึ่งถ้าแก้สาเหตุต้นตอได้ จะทำให้สาเหตุอื่นถูกกำจัดไปด้วย และนำสาเหตุที่เหลือมาวิจัยต่อได้ตามช่วงเวลาต่าง ๆ ทำให้เกิดการทำวิจัยในชั้นเรียนอย่างต่อเนื่อง

3. ศึกษาหาวิธีการในการแก้ปัญหา เมื่อครูได้วิเคราะห์ปัญหาและสาเหตุของปัญหาแล้ว เพื่อที่จะให้ได้แนวทางในการแก้ปัญหา ครูต้องศึกษาเอกสารที่เกี่ยวข้อง เช่น แนวคิดทฤษฎีการเรียนรู้ หลักสูตร ตำรา คู่มือ ผลงานวิจัย เพื่อครูจะได้ทราบว่าปัญหาที่คล้ายกับปัญหาที่ประสบอยู่นั้นมีผู้ใดศึกษาไว้บ้าง ใช้วิธีใดในการแก้ปัญหา ผลการแก้ปัญหาเป็นอย่างไร จะทำให้ครูเห็นแนวทางในการแก้ปัญหาได้ชัดเจนขึ้น ซึ่งอาจจะเป็นกิจกรรม หรือสื่อช่วยการเรียนรู้ เช่น กิจกรรมกลุ่มแบบต่าง ๆ สถานการณ์จำลอง บทเรียนสำเร็จรูป บทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอน (CAI) คอมพิวเตอร์ช่วยการเรียนรู้ (CAL) เป็นต้น

4. พัฒนานวัตกรรมหรือวิธีการแก้ปัญหา จากการศึกษาในขั้นที่ 3 ครูจะได้ทางเลือกในการแก้ปัญหาที่เป็นไปได้ ซึ่งครูต้องศึกษาและออกแบบหรือพัฒนานวัตกรรม วิธีการ หรือสื่อช่วยการเรียนรู้ที่จะใช้ในการแก้ปัญหา แล้วดำเนินการหาคุณภาพจากผู้รู้หรือผู้เชี่ยวชาญในเรื่องนั้นๆ โดยนำนวัตกรรม วิธีการหรือสื่อต้นแบบที่พัฒนาขึ้นไปให้เพื่อนครู ศึกษานิเทศก์ หรือนักวิชาการที่เกี่ยวข้องกับเรื่องที่ศึกษา ตรวจสอบความถูกต้อง เหมาะสม และให้ข้อเสนอแนะ แล้วนำมาปรับปรุงแก้ไข เตรียมนำไปใช้กับผู้เรียนของตน

5. นำนวัตกรรมหรือวิธีการแก้ปัญหาไปใช้ ครูนำนวัตกรรม วิธีการหรือสื่อที่สร้างขึ้นในขั้นที่ 4 ไปใช้กับผู้เรียนของตน โดยระบุขั้นตอนการดำเนินการอย่างชัดเจน แล้วเก็บรวบรวมข้อมูล เช่น สังเกตและบันทึกพฤติกรรมเบื้องต้นของผู้เรียนก่อนใช้ เมื่อใช้เสร็จแล้วสังเกตและบันทึกพฤติกรรมอีกครั้งหนึ่ง เพื่อนำข้อมูลมาวิเคราะห์หาความเปลี่ยนแปลงของผลที่เกิดขึ้น โดยครูผู้วิจัยต้องสร้างเครื่องมือหรือกำหนดวิธีการที่ใช้ในการรวบรวมข้อมูล เช่น ใช้แบบสังเกตพฤติกรรม แบบประเมินการปฏิบัติงาน แบบทดสอบ เป็นต้น รวมทั้งแนวทางการวิเคราะห์ข้อมูล

6. ตรวจสอบและสรุปผล เมื่อรวบรวมข้อมูลได้แล้ว นำข้อมูลมาวิเคราะห์ โดยอาจใช้การแจกแจงหรือเลือกใช้สถิติที่เหมาะสม แล้วสรุปและอภิปรายผลการวิเคราะห์ข้อมูล หากยังไม่สามารถแก้ปัญหาได้ตามที่ต้องการ ก็จะต้องทำการปรับปรุงแก้ไข โดยย้อนกลับไปตรวจสอบในขั้นต่างๆ แล้วนำกิจกรรมหรือสื่อที่ปรับปรุงแล้วไปใช้อีก จนกระทั่งสามารถแก้ปัญหาได้ตามที่ต้องการ เขียนสรุปผลการดำเนินงานตั้งแต่ขั้นที่ 1 ถึงขั้นที่ 5 ผลการวิจัยที่ได้ก็จะเป็นผลของการแก้ไขปรับปรุงในวงจรการพัฒนาคุณภาพการจัดการเรียนรู้ด้วย

10.2.3 ความเชื่อถือได้ของงานวิจัยในชั้นเรียน

งานวิจัยในชั้นเรียนเป็นงานวิจัยปฏิบัติการเพื่อปรับปรุงวิธีปฏิบัติงานในสภาพจริงกับกลุ่มผู้เรียนที่ครูรับผิดชอบอยู่ ซึ่งอาจมีลักษณะไม่เหมือนผู้เรียนกลุ่มอื่น กระบวนการวิจัยก็มุ่งเน้นการดำเนินงานที่พยายามให้สอดคล้องกับสภาพการเรียนการสอนในชีวิตประจำวัน ดังนั้น จึงไม่สมควรนำมาตรฐานการประเมินงานวิจัยทั่วไปที่มุ่งสรุปผลไปยังประชากรมาใช้กับงานวิจัยในชั้นเรียน

นักวิจัยปฏิบัติการจะให้ความสำคัญกับการนำผลไปปฏิบัติ ดังนั้น ความเชื่อถือได้ของงานวิจัยในชั้นเรียนจึงอยู่ที่ความสามารถในการชี้แนะทางการพัฒนาปรับปรุงการทำงานสำหรับผู้ปฏิบัติ

1. กระบวนการในการทำวิจัยในชั้นเรียนให้น่าเชื่อถือ

การทำให้การวิจัยในชั้นเรียนมีความน่าเชื่อถือสูง จึงมีกระบวนการ ดังนี้

1.1 ตัวครูเองต้องเป็นผู้ตีความหมายการปฏิบัติงานของตนเองอย่างใด่ตรง และตัดสินใจว่าจะปรับปรุงงานอย่างไรด้วยความตั้งใจ

1.2 เพื่อนร่วมงานช่วยใด่ตรง ตรวจสอบข้อมูล เพื่อขยายความคิด และช่วยวิพากษ์วิจารณ์เพื่อให้ได้ข้อสรุปและตีความหมายสิ่งที่ค้นพบจากหลักฐานที่แสดง โดยกระบวนการวิพากษ์วิจารณ์ที่มีคุณภาพต้องมีลักษณะสำคัญ 4 ประการคือ

- (1) ต้องทำให้สิ่งที่พูดคุยกันเป็นเรื่องจริง
- (2) มีความเข้าใจตรงกันในเรื่องที่กำลังอภิปราย
- (3) มีความจริงใจ
- (4) เรื่องที่นำมาถกกันควรอยู่ในสถานการณ์ที่เหมาะสมกับกลุ่มผู้ปฏิบัติ

1.3 ตรวจสอบผลที่เกิดขึ้นช้า โดยให้ผู้เรียนมีส่วนร่วมในการตรวจสอบด้วย และอาจมีการบันทึกเหตุผลเหตุการณ์ต่าง ๆ ที่เกิดขึ้น เพื่อนำมาเป็นหลักฐานในการตรวจสอบภายหลังได้อีก

แนวคิดและขั้นตอนการทำวิจัยในชั้นเรียน เน้นการทำวิจัยควบคู่กับการปฏิบัติงานโดยไม่เน้นแบบแผนการวิจัยที่เคร่งครัด ในการออกแบบการวิจัยในชั้นเรียนจึงให้ความสำคัญกับกระบวนการวิพากษ์วิจารณ์ และการตีความหรือแปลความหมายสิ่งที่ค้นพบ เพื่อให้เกิดความเข้าใจความกระจ่าง เกิดการขยายความรู้ความคิดของครูผู้ปฏิบัติ คุณภาพของงานวิจัยประเภทนี้จึงอยู่ที่การแสดงหลักฐานเกี่ยวกับกระบวนการตรวจสอบผลการวิจัย กระบวนการที่ใช้ในการปรับปรุงวิธีการแก้ไขแนวปฏิบัติของครูผู้วิจัย และความสามารถในการอธิบายสิ่งที่เกิดขึ้นอย่างเป็นระบบ โดยที่กระบวนการตรวจสอบผลการวิจัยไม่ใช่การเขียนแสดงความชื่นชมผลงาน การแสดงความยินดี หรือการให้กำลังใจแก่ครูผู้วิจัย แต่ต้องเป็นการเขียนที่ครูจะได้ประโยชน์ในการปรับปรุงการปฏิบัติงานให้ดียิ่งขึ้น

2. เกณฑ์การประเมินคุณภาพงานวิจัยในชั้นเรียน ควรมีย่อประกอบ 3 ประการ ดังนี้

2.1 ระดับของการอธิบายเชิงวิทยาศาสตร์ การวิจัยในชั้นเรียนกำหนดปัญหาจากประสบการณ์และการปฏิบัติโดยครูผู้วิจัย ซึ่งเป็นอิสระจากทฤษฎีอื่นๆ ดังนั้น เกณฑ์การประเมินในด้านนี้ คือ **ข้อความที่เป็นจริง (true statements)** ซึ่งมีความถูกต้อง เหมาะสมตามสภาพจริง น่าเชื่อถือ

2.2 ระดับของการสร้างความกระจ่างในกลุ่มผู้ตรวจสอบผล ในกระบวนการแลกเปลี่ยนประสบการณ์และตรวจสอบข้อค้นพบกับเพื่อนร่วมงาน ขอบเขตของการสื่อสาร การอภิปรายร่วมกันต้องเปิดกว้าง และอยู่บนพื้นฐานของความเข้าใจร่วมกัน เกณฑ์การประเมินในด้านนี้ คือ **ความเข้าใจตามสภาพจริง (authentic insights)**

2.3 ระดับของการจัดระบบในการปฏิบัติ ซึ่งเกี่ยวข้องกับการเลือกปัญหา วิธีการแก้ปัญหา การเผชิญกับบริบทของสังคมและการเมือง เกณฑ์การประเมินในด้านนี้คือ **การตัดสินใจที่สุ่มรอบคอบว่าจะเลือกวิธีการแก้ปัญหาแบบใด** เพราะการวิจัยในชั้นเรียนเป็นการปฏิบัติจริง ซึ่งต้องตอบสนองความเป็นปัจจุบันได้ทันที ครูผู้วิจัยจึงต้องมีความรอบคอบในการเลือกและจัดระบบวิธีการปฏิบัติ

ครูผู้วิจัยในชั้นเรียนต้องไม่กังวลว่า งานวิจัยในชั้นเรียนของตนจะไม่ได้มาตรฐานและมีคุณภาพดีเท่างานวิจัยของนักวิชาการ สิ่งที่สะท้อนคุณภาพงานวิจัยในชั้นเรียนของครูคือคุณภาพของผู้เรียนอันเป็นผลสืบเนื่องมาจากนวัตกรรมหรือวิธีการที่ครูใช้ในการแก้ปัญหาหรือพัฒนาการจัดการเรียนรู้

ข้อความรู้ที่ครูได้จากการศึกษาวิจัยอย่างเป็นระบบและจัดเก็บอย่างเป็นหมวดหมู่ในแต่ละภาคเรียนที่ผ่านมา อาจทำให้ครูสามารถสร้างทฤษฎีใหม่เกี่ยวกับการพัฒนากระบวนการเรียนรู้ อันเกิดจากการปฏิบัติงานของครูอย่างแท้จริง โดยไม่จำเป็นต้องยึดติดอยู่กับกรอบแนวคิดเดิมเสมอไป

10.2.4 การเขียนสรุปรายงานการวิจัยในชั้นเรียน

การนำเสนอรายงานการวิจัยในชั้นเรียนสามารถจัดทำได้ 2 แบบ คือ

1. รายงานการวิจัยที่เขียนตามแบบแผนการวิจัย ส่วนใหญ่มีการนำเสนอที่มีรูปแบบตายตัว โดยมีหัวข้อสำคัญดังต่อไปนี้

1.1 บทนำ

ประกอบด้วยเนื้อหาเกี่ยวกับ ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา คำถามวิจัย กรอบความคิดของการวิจัย วัตถุประสงค์ของการวิจัย ขอบเขตของการวิจัย นิยามศัพท์เฉพาะ ข้อตกลงเบื้องต้นของการวิจัย ข้อจำกัดของการวิจัย ประโยชน์ที่ได้รับจากการวิจัย

1.2 เอกสารที่เกี่ยวข้องกับการวิจัย

1.3 วิธีดำเนินการวิจัย

ประกอบด้วย เนื้อหาเกี่ยวกับระเบียบวิธีวิจัย กลุ่มตัวอย่าง เครื่องมือวิจัย การเก็บรวบรวมข้อมูล การวิเคราะห์ข้อมูล

1.4 ผลการวิเคราะห์ข้อมูล

1.5 สรุปผลการวิเคราะห์ข้อมูล อภิปราย และข้อเสนอแนะ

1.6 บรรณานุกรม

1.7 ภาคผนวก

ครูผู้ทำการวิจัยในชั้นเรียนที่ต้องการเขียนรายงานการวิจัยแบบนี้ สามารถศึกษาตัวอย่างการเขียนได้จากรายงานการวิจัยทั่วไปของนักวิชาการ คณาจารย์ หรือนิสิต นักศึกษาในระดับบัณฑิตศึกษา

2. รายงานการวิจัยที่เขียนตามขั้นตอนการสร้างสรรค์ของผู้วิจัย เนื้อหาสาระของรายงานการวิจัยในชั้นเรียนเหมือนรายงานการวิจัยทั่วไป แต่มักนำเสนออย่างสั้นๆ ไม่มีอีกรูปแบบตายตัว ขอเพียงให้มีสาระครบถ้วนทำให้เข้าใจสิ่งที่ศึกษา ขั้นตอนที่ปฏิบัติ และสิ่งที่ค้นพบ นอกจากนี้ รายงานการวิจัยในชั้นเรียนที่ดี ควรแสดงหลักฐานเกี่ยวกับกระบวนการตรวจสอบ วิพากษ์วิจารณ์ เพื่อเป็นข้อมูลยืนยันข้อสรุปที่ได้จากการวิจัย เนื่องจากการวิจัยในชั้นเรียนอาศัยประสบการณ์ของผู้วิจัยและเพื่อนร่วมงานหรือผู้ที่เกี่ยวข้องมาช่วยในกระบวนการวิจัย ซึ่งสามารถให้คำตอบที่

นำไปสู่การปฏิบัติจริง ดังนั้น การวิพากษ์วิจารณ์จากผู้มีส่วนร่วม จะทำให้ผลการวิจัยมีความน่าเชื่อถือมากขึ้น

10.2.5 ตัวอย่างงานวิจัยในชั้นเรียน

โดยทั่วไปแล้ว การทำวิจัยในชั้นเรียนเป็นการทำงานของครู เพื่อแก้ปัญหาที่เกิดขึ้นในชั้นเรียนที่ครูรับผิดชอบ การเขียนรายงานการวิจัยในชั้นเรียน จึงเป็นการบันทึกการทำงานของครูอย่างเป็นระบบ เพื่อจัดเก็บไว้เป็นแฟ้มสะสมงาน เป็นร่องรอยหลักฐานในการทำงาน เป็นเอกสารเพื่อการเผยแพร่แก่เพื่อนครูที่จะใช้เป็นแนวทางในการนำไปประยุกต์ใช้ต่อไป หรือเป็นเครื่องมือในการแลกเปลี่ยนเรียนรู้ เกี่ยวกับการเรียนการสอนเชิงวิชาการซึ่งกันและกันของครู จุดเน้นของการทำวิจัยในชั้นเรียนจึงไม่ใช่เพื่อการอ้างอิงไปยังกลุ่มประชากรหรือเป็นการทำผลงานเพื่อเลื่อนตำแหน่งของครู แต่เป็นการทำงานเพื่อแก้ปัญหของตนเอง สร้างสมประสบการณ์ และสะสมผลงานทางวิชาการ การทำงานวิจัยในชั้นเรียนจึงเป็นการบันทึกการทำงานของครู เพื่อเผยแพร่แก่เพื่อนครู และทำในบริบทที่เป็นห้องเรียน โรงเรียน และชุมชนของครู งานวิจัยที่ทำในบริบทที่แตกต่างกันจึงไม่สามารถเปรียบเทียบได้ว่างานวิจัยใดดีที่สุด หรือสมบูรณ์ที่สุด หรืองานวิจัยในชั้นเรียนใดน่าจะใช้

เป็นตัวอย่างการทำวิจัยในชั้นเรียนของครู เพราะเป็นการทำวิจัยในชั้นเรียนที่มีบริบทที่แตกต่างกันดังกล่าว แต่เพื่อให้ครูได้ศึกษาแนวคิดการทำวิจัยในชั้นเรียนที่มีผู้ทำสำเร็จมาแล้วเพื่อเป็นตัวอย่างที่จะแสดงถึงวิธีการคิดและกระบวนการทำวิจัยในชั้นเรียนของครู ผู้เขียนจึงขอยกตัวอย่างงานวิจัยในชั้นเรียนของครูที่มีวิธีการคิดและการทำวิจัยในชั้นเรียนแตกต่างกัน เพื่อให้ครูเกิดความมั่นใจและเข้าใจตรงกันว่าการทำวิจัยในชั้นเรียนนั้นไม่มีสิ่งที่ถูกหรือผิด จะมีเพียงสิ่งที่เหมาะสมมากน้อยหรือไม่เท่านั้นเอง ถ้าครูใช้กระบวนการวิจัย กระบวนการทางวิทยาศาสตร์ หรือกระบวนการแก้ปัญหาเป็นหลักการในการทำวิจัยในชั้นเรียนแล้วก็น่าจะแสดงว่าครูมีวิธีคิดอย่างเป็นระบบ และเป็นการทำวิจัยในชั้นเรียนที่เหมาะสมได้

ตัวอย่างการวิจัยในชั้นเรียนที่น่าสนใจนี้เป็นตัวอย่างของการทำวิจัยในชั้นเรียนที่ไม่ใช่การวิจัยเชิงวิชาการ (Academic Research) ซึ่งเพื่อนครูสามารถศึกษาได้ง่ายจากห้องสมุดในสถาบันอุดมศึกษาทุกแห่ง

10.3 การใช้และการเผยแพร่ผลงานการวิจัยในชั้นเรียน

เนื่องจากการทำงานวิจัยในชั้นเรียนเป็นกระบวนการแก้ปัญหาและพัฒนาผู้เรียนของครูเป็นการสร้างความรู้ในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ และการพัฒนานวัตกรรมที่หลากหลายของครู โดยที่ครูแต่ละคน และผู้เรียนแต่ละคนหรือแต่ละกลุ่มจะมีลักษณะแตกต่างกัน ผลการแก้ปัญหาของครู ความรู้ที่ครูพบจากการทำวิจัยในชั้นเรียน หรือแม้แต่ต้นนวัตกรรมที่ครูใช้และได้จากการวิจัยในชั้นเรียน ต่างก็เป็นประโยชน์สำหรับครูในกลุ่มอื่นที่พบผู้เรียนที่มีปัญหาเดียวกันหรือต้องการพัฒนาจะได้เลือกไปใช้กับนักเรียนของตนเอง ครูไม่จำเป็นต้องหาวิธีการแก้ปัญหของตนเองใหม่ทุกครั้ง การศึกษา การเผยแพร่หรือการแลกเปลี่ยนเรียนรู้งานวิจัยในชั้นเรียนซึ่งกันและกัน จะทำให้ครูมีมุมมองในการทำงานและการแก้ปัญหาในชั้นเรียนที่หลากหลายจากประสบการณ์ของความเป็นครูที่สั่งสมกันมา มีความมั่นใจที่จะคิดริเริ่มแก้ปัญหาหรือพัฒนาผู้เรียนตามแนวทางของตนเองเพิ่มขึ้น มีความภูมิใจในวิชาชีพความเป็นครูของตนเองมากขึ้น และที่สำคัญ คือ ครูจะมีผลงานการสร้างความรู้ด้วยตนเองมากขึ้น และมีฐานะของการเป็นครูที่ใช้ความรู้ที่ตนเองสร้างขึ้นร่วมกันมา พัฒนาการจัดการเรียนรู้ในห้องเรียนของแต่ละคนมากกว่าการนำความรู้ที่ลอกแบบหรือจำมาจากนักวิชาการหรือผู้ที่ไม่มีประสบการณ์การเป็นครูมาใช้สอน หรือการนำนวัตกรรมต่างประเทศมาใช้โดยไม่คำนึงถึงบริบทของสังคมและวัฒนธรรมไทย

10.3.1 การนำผลการวิจัยในชั้นเรียนไปใช้

ครูสามารถนำผลการวิจัยในชั้นเรียนไปใช้ได้หลายลักษณะ คือ

1. การแก้ปัญหาหรือพัฒนาผู้เรียนให้เต็มตามศักยภาพและเป็นไปตามธรรมชาติ ผู้เรียนในแต่ละห้องเรียนหรือชั้นเรียนหรือรายคนต่างก็มีปัญหา มีศักยภาพในการเรียนรู้แตกต่างกัน มีความถนัด มีความสามารถและมีธรรมชาติของตนเองแตกต่างกันไปด้วย การวิจัยในชั้นเรียนจะช่วยให้ครูสามารถนำผลที่ได้จากการวิจัย การแก้ปัญหา หรือการพัฒนา หรือการปรับพฤติกรรมผู้เรียนมาใช้ให้เหมาะสมกับผู้เรียนได้ และงานวิจัยในชั้นเรียนที่หลากหลายที่ครูทำขึ้น ก็จะช่วยให้ครูมีนวัตกรรมที่จะเป็นทางเลือกในการแก้ปัญหาหรือพัฒนาผู้เรียนได้มากขึ้น

2. การสร้างองค์ความรู้ของครูเกี่ยวกับวิธีการพัฒนาหรือการแก้ปัญหของผู้เรียน หากครูทำงานวิจัยในชั้นเรียนอย่างมีระบบจะทำให้ได้ผลงานที่มีความหนักแน่น สามารถสร้างเป็นองค์ความรู้ของตนเองได้ เช่น ครูที่ทำวิจัยในชั้นเรียน เรื่อง การพัฒนาหรือการแก้ปัญหการอ่านสะกดคำด้วยนวัตกรรมต่างๆ หากครูทำอย่างต่อเนื่อง ใช้นวัตกรรมในการแก้ปัญหาแต่ละครั้งแตกต่างกัน

ออกไป เช่น ใช้แบบฝึก หรือ บทเรียน โปรแกรม หรือ คอมพิวเตอร์ช่วยสอน หรือการให้ผู้เรียน
สร้างบัตรคำการอ่านสะกดคำที่ตนเองอ่านไม่ได้มาฝึกอ่าน หรือครูกับผู้เรียนช่วยกันทำหนังสือเล่ม
เล็ก หรือหนังสือเสริมการอ่านมาฝึกให้ผู้เรียนอ่านสะกดคำ ก็จะทำให้ครูได้ชุดของนวัตกรรมเพื่อ
แก้ปัญหาหรือพัฒนาทักษะการอ่านสะกดคำของผู้เรียน ทำให้ครูมีองค์ความรู้ที่จะใช้สอนผู้เรียน
หรือแก้ปัญหาของผู้เรียนหรือพัฒนาผู้เรียนให้มีความสามารถในการอ่านสะกดคำได้อย่าง
เหมาะสมกับผู้เรียนเป็นรายคน และมีนวัตกรรมการเรียนรู้ที่มีประสิทธิภาพไว้ใช้ในการสอน การ
พัฒนาหรือการแก้ปัญหาของผู้เรียน เป็นองค์ความรู้ที่ครูสร้างขึ้นจากพื้นฐานของผู้เรียนของตนเอง
ซึ่งครูก็สามารถสร้างและพัฒนาชุดนวัตกรรมนี้ให้มีคุณภาพต่อไปได้ และบทเรียนจากการสร้าง
องค์ความรู้ที่ใช้สอนเรื่องการอ่านสะกดคำนี้ยังช่วยให้ครูได้แนวทางในการสร้างองค์ความรู้ใหม่ๆ
โดยสามารถนำบทเรียนและประสบการณ์การทำวิจัยในชั้นเรียนช่วงต้น ๆ นี้ ไปใช้เป็นพื้นฐานใน
การสร้างและพัฒนาองค์ความรู้เรื่องใหม่ของครูต่อไปได้ ครูก็จะเป็นผู้สร้างองค์ความรู้และใช้องค์
ความรู้ที่ตนเองสร้างขึ้น เพื่อใช้ในการสอน การพัฒนา การแก้ปัญหาให้กับผู้เรียนของตนเอง เป็น
ผู้ผลิตความรู้ไม่ใช่ผู้ใช้ความรู้ของผู้อื่นมาสอนผู้เรียนของตนเองเพียงฝ่ายเดียวอีกต่อไป

3. การพัฒนาครูผู้ทำวิจัยในชั้นเรียนไปสู่ความเป็นครูนักวิชาการและครูมืออาชีพ จาก
พระราชบัญญัติการศึกษาแห่งชาติ พ.ศ. 2542 ที่กำหนดให้ครูต้องมีใบอนุญาตประกอบวิชาชีพทำ
ให้ครูมีความจำเป็นต้องทำงานของตนเองให้มีระบบ เช่น ต้องพัฒนาผู้เรียนให้ได้ผลดีมากที่สุด คือ
มีคุณภาพเป็นที่ยอมรับของชุมชนมากที่สุด หรือสามารถพัฒนาผู้เรียนให้ได้คุณภาพตามความ
ต้องการของผู้ปกครองและชุมชนมากที่สุด จากการที่ครูต้องจัดการศึกษาโดยเน้นผู้เรียนเป็นสำคัญ
เพื่อให้ผู้เรียนเป็นผู้ที่มีความสามารถในการพึ่งพาตนเอง สามารถคิดวิเคราะห์ คิดสังเคราะห์ คิด
อย่างมีวิจารณญาณได้ ทำให้ครูต้องพัฒนาตนเองให้มีความสามารถในการพึ่งพาตนเองในการสร้าง
ความรู้ หรือการพัฒนาประสบการณ์ของตนเองมาเป็นวิธีการในการแก้ปัญหาหรือพัฒนาผู้เรียน
อย่างมีระบบ ซึ่งวิธีการที่ครูควรจะต้องนำมาใช้คือการทำวิจัยในชั้นเรียน เพื่อพัฒนาตนเองสู่ความ
เป็นครูมืออาชีพ

4. การพัฒนาโรงเรียนสู่มาตรฐานการประเมินคุณภาพภายในสถานศึกษาเพื่อรองรับการ
ประเมินคุณภาพภายนอก ทำให้ครูจำเป็นต้องใช้ผลการวิจัยในชั้นเรียนมาเป็นเครื่องมือในการ
แก้ปัญหาและพัฒนาผู้เรียน เพราะครูต้องพัฒนาผู้เรียนรอบด้าน ทั้งในแง่ของการเรียนรู้ตาม
หลักสูตรและการมีพฤติกรรมที่พึงประสงค์ของสังคมในแง่ของการเป็นสมาชิกที่ดีของสังคม คือ
การเป็นคนดี คนเก่ง คนมีความสุข และภาคภูมิใจในความเป็นไทย ซึ่งผู้เรียนจำเป็นต้องใช้ทักษะ
ในการดำรงชีวิตบางประการ เช่น ทักษะการคิดแบบต่าง ๆ ทักษะการอยู่ร่วมกันในสังคมอย่างมี

ความสุข และที่สำคัญ คือ การมีทักษะในการพึ่งพาตนเอง ทักษะในการเป็นผู้ผลิตงานมากกว่าการเป็นผู้บริโภคงาน รวมทั้งมีทักษะในการวิจัยเพื่อแก้ปัญหาและพัฒนางานด้วย

7.3.2 การเผยแพร่ผลงานการวิจัยในชั้นเรียน

การเผยแพร่งานวิจัยในชั้นเรียนของครูสามารถทำได้หลายลักษณะ ซึ่งในที่นี้ ขอจำแนกเป็น 2 ส่วน คือ ส่วนของครูที่ทำวิจัยในชั้นเรียนและส่วนของหน่วยงานที่เกี่ยวข้อง

1. ส่วนของครูที่ทำงานวิจัยในชั้นเรียน ครูที่ทำงานวิจัยในชั้นเรียนสามารถเผยแพร่งานวิจัยของตนเองได้หลายทาง เช่น

1.1 การเผยแพร่โดยใช้เอกสาร สิ่งพิมพ์ เช่น การส่งรายงานการวิจัยในชั้นเรียนของตนเองให้ผู้ที่สนใจแก้ปัญหาการจัดการเรียนรู้ หรือการปรับพฤติกรรมของผู้เรียนร่วมกัน

1.2 เขียนรายงานการวิจัยในชั้นเรียนใหม่ให้เป็นรูปแบบของบทความหรือเรื่องเล่า หรือการเล่าประสบการณ์ เพื่อส่งไปเผยแพร่ทางวารสาร ทางรายการวิทยุหรือโทรทัศน์เพื่อการศึกษา หรือคอลัมน์ที่เกี่ยวกับงานทางการศึกษาหรือทางวิชาการต่างๆ

1.3 การสร้างเครือข่ายเพื่อนครูนักวิจัยในชั้นเรียน เพื่อช่วยเหลือ แลกเปลี่ยนความรู้และประสบการณ์ในการวิจัยในชั้นเรียนร่วมกัน

2. ส่วนที่เป็นหน่วยงานที่เกี่ยวข้อง เช่น หน่วยงานต้นสังกัดระดับโรงเรียน กลุ่มโรงเรียน อำเภอ จังหวัด กรม กระทรวง สถาบันอุดมศึกษาต่างๆ รวมทั้ง หน่วยงานภาคเอกชน เช่น องค์กรพัฒนาเอกชนที่สนใจการพัฒนาการศึกษา ชมรมที่เกี่ยวข้องกับการศึกษา ควรให้การสนับสนุนการวิจัยในชั้นเรียนของครูโดยการจัดเวทีให้ครูได้เผยแพร่งานวิจัยในชั้นเรียนของตนเองโดยการจัดให้มีกิจกรรมต่าง ๆ เช่น

2.1 การเสวนาเชิงวิชาการกลุ่มเล็กในพื้นที่ เพื่อให้ครูนำผลงานการวิจัยในชั้นเรียนของตนเองมาแลกเปลี่ยนเรียนรู้ประสบการณ์การทำงานและการทำวิจัยในชั้นเรียนร่วมกัน

2.2 จัดประชุมเชิงวิชาการเพื่อนำเสนอผลงานการวิจัยในชั้นเรียน เป็นเรื่องเฉพาะด้าน หรือเป็นระดับชั้น หรือนำเสนอรวมกันทั้งหมด การนำเสนอเฉพาะด้าน เช่น

- (1) ด้านการศึกษาผู้เรียนเป็นรายกรณีและการปรับปรุงแก้ไข
- (2) ด้านการพัฒนาการเรียนรู้กลุ่มวิชาต่าง ๆ เช่น ภาษาไทย คณิตศาสตร์ ศิลปะ สุขศึกษาและพลศึกษา สังคมศึกษา ศาสนาและวัฒนธรรม วิทยาศาสตร์ การงานอาชีพและเทคโนโลยี ภาษาต่างประเทศ เป็นต้น
- (3) การนำเสนอเป็นระดับชั้น เช่น ระดับปฐมวัย ระดับประถมศึกษา ระดับมัธยมศึกษาตอนต้น ระดับมัธยมศึกษาตอนปลายระดับอาชีวศึกษา

2.3 การจัดตั้งศูนย์หรือสถาบันการพัฒนาการทำวิจัยในชั้นเรียนเพื่อเป็นศูนย์กลาง
การพัฒนางานวิจัยในชั้นเรียนของครูและเป็นแหล่งเผยแพร่งานวิจัยในชั้นเรียนของครู โดยครูที่ทำ
ผลงานการวิจัยสามารถส่งงานมาเผยแพร่ในศูนย์หรือสถาบันแห่งนี้ ในขณะที่ด้วยกันครูที่ต้องการ
ศึกษางานวิจัยในชั้นเรียนก็สามารถมาศึกษาที่ศูนย์หรือสถาบันแห่งนี้ได้ โดยอาจจัดทำเป็นศูนย์หรือ
สถาบันในระดับกลุ่มโรงเรียน อำเภอ จังหวัด หรือระดับชาติก็ได้

บรรณานุกรม

- กรมวิชาการ กระทรวงศึกษาธิการ. (2540). การประเมินผลจากสภาพจริง. กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์คุรุสภาลาดพร้าว.
- บุญเชิด ภิญโญอนันตพงษ์. (2545). การประเมินผลการเรียนรู้ที่เน้นผู้เรียนเป็นสำคัญ แนวคิดและวิธีการ. กรุงเทพฯ: วัฒนาพานิช.
- บัณฑิต โรจน์อารยานนท์. (2553). คณิตศาสตร์โอลิมปิกญี่ปุ่น. กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์ ศ.ส.ท.
- สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. (2550). ทักษะ/กระบวนการทางคณิตศาสตร์. กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์คุรุสภาลาดพร้าว.
- สมวงษ์ แปลงประสพโชค สมเดช บุญประจักษ์ และ จรรยา ภูอุดม. (2549). นวัตกรรมเพื่อพัฒนาคุณภาพการจัดการศึกษาคณิตศาสตร์ขั้นพื้นฐานของเด็กไทย : การศึกษาสาเหตุเด็กไทยอ่อนคณิตศาสตร์และแนวทางแก้ไข. มหาวิทยาลัยราชภัฏพระนคร.
- สุวิมล ว่องวานิช. (2546). รวบรวมบทความการประเมินผลการเรียนรู้แนวใหม่. กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.
- สุวิมล ว่องวานิช. (2544). การวิจัยปฏิบัติการในชั้นเรียน (Classroom Action Research). พิมพ์ครั้งที่ 3 กรุงเทพมหานคร: โรงพิมพ์อักษรไทย.
- อุทุมพร จามรมาน. (2537). การวิจัยของครู (Action Research). กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.
- อุทุมพร จามรมาน. (2554). การวิจัยในชั้นเรียนและในโรงเรียนเพื่อพัฒนาผู้เรียน. เล่มที่ 22 กรุงเทพมหานคร: โรงพิมพ์ฟีนี.
- Aoyagi, M. (2005). **Mathematics for Elementary School**. Japan : Gakkohtosho.
- Bevan, K. Youse. (1984). **Calculus for the Managerial, Social, and life Sciences**. Minnesota: West Publishing Company.
- Terrell, Trotter, Jr. "Normal Magic Triangles of Order n." **Journal of Recreational Mathematics** 5, 1 (1972): 28-32.